Übung 10

1. Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass $Rad\,(I) = \{r \in R \,|\exists n \in \mathbb{N} : r^n \in I\}$ ein Ideal von R ist.

2. Sei $R \neq \{0\}$ ein Ring, sodass $\forall\ 0 \neq r \in R\ \exists!\ s \in R : r.s.r = r$ gilt.

   Zeigen Sie:

   a. R ist ein Integritätsbereich

   b. R ist ein Ring mit Einselement

   c. R ist ein Schiefkörper

3. Sei $h : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ein Ringhomomorphismus, sodass $h\,(1) = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass h die identische Abbildung ist.

4. Ist $\mathbb{Z}_n$ ein Hauptidealring ?

5. Sei $R = R_1 \times R_2 \times .... \times R_n$ ein direktes Produkt von Ringen mit Einselement $R_j, j \in \{1, ..., n\}$. Zeigen Sie:

   Für jedes Ideal $I \trianglelefteq R$ existieren Ideale $I_j \trianglelefteq R_j, j \in \{1, ..., n\}$, sodass $I = I_1 \times I_2 \times .... \times I_n$ gilt.