Kommutative Algebra
4. Übungsblatt für den 1. April 2014

Wir besprechen auch folgende Beispiele vom 3. Blatt:

(3) (Nicht faktorielle Integritätsbereiche, cf. [1]) Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{5}\,i] := \{a + b\sqrt{5}\,i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. (Dieser Ring ist ein Unterring von $\mathbb{C}$, also ein Integritätsbereich.)
   (a) Verwenden Sie die Abbildung $N(r) := r \cdot \overline{r}$, um alle invertierbaren Elemente von R zu finden.
   (b) Bestimmen Sie alle Elemente r von R mit $N(r) \leq 9$.
   (c) Zeigen Sie, dass die vier Elemente $2, 3, 1+\sqrt{5}\,i, 1-\sqrt{5}\,i$ alle irreduzibel sind.
   (d) Zeigen Sie, dass R kein faktorieller Ring ist.

(4) Wieviele Elemente haben die folgenden Faktorringe von $\mathbb{Z}[i]$?
   (a) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+i\rangle$
   (b) $\mathbb{Z}[i]/\langle 3+4i\rangle$
   (c) $\mathbb{Z}[i]/\langle a+bi\rangle$, wenn $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$.

(5) (Primitive Polynome)
   (a) Sei g ein primitives Polynom in $\mathbb{Z}[x]$, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ so, dass $\frac{\beta}{\alpha}\, g \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie $\alpha \mid \beta$.
   (b) Für $h \in \mathbb{Z}[x]\setminus\{0\}$ sei $c(h)$ der ggT der Koeffizienten von h. Sei $g \in \mathbb{Q}[x]$, $g \neq 0$, und sei $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so, dass $\alpha\, g \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie: wenn $\alpha \mid c(\alpha\, g)$, so gilt $g \in \mathbb{Z}[x]$.

---

(1) Die Polynome x und y in $\mathbb{Q}[x,y]$ haben nur konstante gemeinsame Teiler. Trotzdem lässt sich 1 nicht als $ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{Q}[x,y]$ schreiben. Zeigen Sie, dass aber folgende Aussage gilt:

   Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x,y]$ so, dass f und g keinen nichtkonstanten gemeinsamen Teiler in $\mathbb{Q}[x,y]$ haben. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{Q}[x,y]$, sodass
$$af + bg \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}.$$

   Hinweis: Wie kann ein gemeinsamer Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x)[y]$ aussehen?

(2) (Größter gemeinsamer Teiler) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x,y]$ gegeben durch
$$\begin{aligned} f &= x^4y^2 + x^4y + x^3y + x^3 \\ g &= x^2y^4 + x^2y^3 + xy^3 + xy^2 \end{aligned}$$
   (a) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x)[y]$ mit führendem Koeffizienten 1.
   (b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(y)[x]$ mit führendem Koeffizienten 1.
   (c) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}[x,y]$.
   (d) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{Q}(x,y)$.

   Dabei ist $\mathbb{Q}(x)$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Q}[x]$. *Hinweis:* Sie können die Funktion `PoliesExtendedGCD` aus der Datei `poliesGCD.m` verwenden, die den g.g.T. in $K[x]$ (K Körper) berechnet.

(3) (Größter gemeinsamer Teiler) Berechnen Sie größte gemeinsame Teiler von $3220 + 5520x + 2300x^2 + 460x^3 + 460x^4$ und $-230 - 230x + 46x^3 + 46x^4$ in $\mathbb{Z}[x]$ und $\mathbb{Q}[x]$.

Literatur

[1] Wikipedia. Unique factorization domain — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [Online; accessed 17-March-2009].