Kommutative Algebra
7. Übungsblatt für den 6. Mai 2014

Wir besprechen noch folgende verbliebene Beispiele:

- (6.3) Sei $R := \mathbb{Z}[t_1, t_2]/I$, wobei $I := \langle {t_1}^2 - 2,\ {t_2}^2 - t_1 - 1\rangle_{\mathbb{Z}[t_1,t_2]}$. Finden Sie ein Polynom in $\mathbb{Z}[t] \setminus \{0\}$, das $t_2 + I$ als Nullstelle hat, indem Sie das charakteristische Polynom einer Matrix ausrechnen. *Hinweis:* $t_2 + I$ liegt in $\mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot (t_1 + I) + \mathbb{Z} \cdot (t_2 + I) + \mathbb{Z} \cdot (t_1 + I)(t_2 + I)$. Jetzt verwenden Sie die Idee vom Beweis von Satz 5.8 aus dem Skriptum.
- (6.5) Sei k ein Körper, $n \geq 2$, und sei I ein Ideal von $R := k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $1 \notin I$. Zeigen Sie, dass die Folge (x_1+I, x_2+I) genau dann algebraisch abhängig ist über k ist, wenn $I \cap k[x_1, x_2] \neq \{0\}$.
- (6.6) In diesem Beispiel überlegen wir uns, ob die Folge $(x^2 + x, x^3 + 2)$ aus $\mathbb{Q}[x]$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.
  (1) Bestimmen Sie eine Transzendenzbasis von $\mathbb{Q}[x]$ über $\mathbb{Q}$.
  (2) Können Sie daraus etwas über die Unabhängigkeit von (x^2+x, x^3+2) herleiten?
  (3) (Mathematica) Berechnen Sie $p(x^2 + x, x^3 + 2)$ für $p(t_1, t_2) = -27 + 6t_1 + t_1^3 + 3t_2 - 3t_1t_2 - t_2^2$. Was schließen Sie daraus über die algebraische Abhängigkeit von $x^2 + x$ und $x^3 + 2$?

(1) (Ganze Erweiterungen) Seien R, S kommutative Ringe mit Eins, sodass $R \leq S$, S ganz über R, und S ein Körper ist. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist. *Hinweis:* Sei $r \in R \setminus \{0\}$. In S gibt es $\frac{1}{r}$. Also ist $\frac{1}{r}$ ganz über R. Leiten Sie daraus die Invertierbarkeit von r in R her.

(2) (Noethersche Normalisierung) Wir betrachten im folgenden Unterring von $\mathbb{Q}(x)$.
  (a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{x}$ algebraisch über $\mathbb{Q}[\![x^2]\!]$ ist.
  (b) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{x}$ nicht ganz über $\mathbb{Q}[\![x^2]\!]$ ist. *Hinweis:* Multiplizieren Sie die Gleichung $(\frac{1}{x})^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x^2) \cdot (\frac{1}{x})^i = 0$ mit x^n.
  (c) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{x}$ ganz über $\mathbb{Q}[\![x^2 - 5 \cdot \frac{1}{x}]\!]$ ist. *Hinweis:* Gehen Sie wie im Beweis des Lemmas vor dem Satz zur Noetherschen Normalisierung vor.

(3) (Nullstellen von Polynomen) Sei k ein Körper, sei $p \in k[t]$, und seien $q, r \in k[t_1, t_2]$. Zeigen Sie:
  (a) Wenn $p \neq 0$, so gibt es einen Körper K mit $k \leq K$, sodass p in K eine Nullstelle hat.
  (b) Wenn $p \neq 0$, so gibt es einen Körper K mit $k \leq K$, sodass K algebraisch über k ist, und p in K eine Nullstelle hat.
  (c) Wenn das von $\{q, r\}$ erzeugte Ideal von $R := k[t_1, t_2]$ nicht der ganze Ring R ist, so gibt es einen Körper K mit $k \leq K$, sodass es $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ mit $q(\alpha_1, \alpha_2) = r(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ gibt. *Hinweis:* Verwenden Sie, dass $k[t_1, t_2]/M$ für jedes maximale Ideal ein Körper ist.