**Kommutative Algebra**
**9. Übungsblatt für den 20. Mai 2014**

Noch offen: 6.6 (3), 7.2 (b,c), 7.3, 8.3 (b), 8.4.

(1) (Bijektive Abbildungen) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$,
$$F(x, y) := \begin{pmatrix} -36x^4 - 120x^3 - 24x^2y - 109x^2 - 40xy - 14x - 4y^2 - 3y \\ 3x^2 + 5x + y \end{pmatrix}$$
bijektiv ist. *Hinweis:* Es reicht zu zeigen, dass $F$ injektiv ist. Verwenden Sie ein Computeralgebrasystem, um $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} : F(\boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{b}) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ zu zeigen.

(2) Seien $f, p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch
$$\begin{aligned} f &= x^3y^3 + 1 \\ p &= 1 + 3x + 2x^2 + x^2y + x^3y \\ q &= xy^2 + x^2y^2 \end{aligned}$$
Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Finden Sie $a_1, a_2, r \in \mathbb{Q}[x, y]$, sodass $f = a_1\, p + a_2\, q + r$, $\textsc{Deg}(a_1\, p) \leq \textsc{Deg}(f)$, $\textsc{Deg}(a_2\, q) \leq \textsc{Deg}(f)$, und kein Term in $r$ ein Vielfaches von $\textsc{Lt}(p)$ oder $\textsc{Lt}(q)$ ist.

(3) Seien $f, p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch
$$\begin{aligned} f &= x^3y^2 \\ p &= 1 + x^3y + 3x^2y^5 \\ q &= 2x^2y + x^2y^2 \end{aligned}$$
Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Finden Sie $a_1, a_2, r \in \mathbb{Q}[x, y]$, sodass $f = a_1\, p + a_2\, q + r$, $\textsc{Deg}(a_1\, p) \leq \textsc{Deg}(f)$, $\textsc{Deg}(a_2\, q) \leq \textsc{Deg}(f)$ und kein Term in $r$ ein Vielfaches von $\textsc{Lt}(p)$ oder $\textsc{Lt}(q)$ ist.

(4) Sei $f = x^2y + xy^2 + y^2$, $f_1 = xy - 1$, $f_2 = y^2 - 1$. Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$.
   (a) Zeigen Sie, dass der Rest $r$ bei einer Standarddarstellung $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + r$ nicht eindeutig bestimmt ist.
   (b) Finden Sie ein Polynom im Ideal $\langle f_1, f_2 \rangle$, das nicht das Nullpolynom ist und das keinen Term enthält, der ein Vielfaches von $xy$ oder $y^2$ ist.