Kommutative Algebra
10. Übungsblatt für den 27. Mai 2014

Wir besprechen auch (9.3) und (9.4).

(1) Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass der Rest der Division von f durch ein Hauptideal $\langle f_1 \rangle$ eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie also: Sei $\leq$ eine zulässige Ordnung, sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und seien $f, f_1 \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $f_1 \neq 0$. Seien $a, b, r, s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ so, dass $f = a\, f_1 + r = b\, f_1 + s$. Wir nehmen an, dass kein Term von r und kein Term von s durch $\mathrm{LT}(f_1)$ teilbar ist. Zeigen Sie $r = s$!

(2) Berechnen Sie jeweils das Subtraktionspolynom $S(f, g)$ für

$$\begin{aligned} f &:= x^3 + x^2 y - 2x^2 + xy + 7x + y^2 + 5y - 14, \\ g &:= 7x^2 + xy^5 + 7xy - 14x + y^6 - 2y^5. \end{aligned}$$

Schreiben Sie dazu f und g jeweils so auf, dass die Monome absteigenden Multigrad haben.

(a) lexikographische Ordnung, $x > y$.
(b) lexikographische Ordnung, $y > x$.
(c) Wir ordnen die Monome zuerst nach dem totalen Grad ($\mathrm{totdeg}(x^\alpha y^\beta) := \alpha + \beta$), dann nach dem Grad in x.

(3) Seien $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{Q}[x, y]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} g_1 &= xy - 1 \\ g_2 &= y^2 + 1 \\ g_3 &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

Sei

$$s := 5x^2 y^2\, g_1 - 3x^3 y\, g_2 - 2xy^3\, g_3,$$

und sei $\delta := (3, 3)$. Wir ordnen die Monome lexikographisch mit $x > y$. Es gilt $\textsc{Deg}(s) < (3, 3)$. Finden Sie $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$s = c_1\, x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}\, S(g_1, g_3) + c_2\, x^{\beta_1} y^{\beta_2}\, S(g_2, g_3)$$

und jeder Summand in dieser Summe Multigrad $< (3, 3)$ hat.

(4) Sei k ein Körper, sei I ein monomiales Ideal von $k[x_1, \ldots, x_n]$, und sei $\leq$ eine zulässige Monomordnung.

(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Menge von Generatoren von I, die nur Monome enthält, eine Gröbnerbasis von I bezüglich $\leq$ ist.
(b) Ist jede endliche Menge von Generatoren von I eine Gröbnerbasis? *Hinweis:* $\{x_1^2, x_1^2 + x_2^2\}$.