Algebra für Informatik (2015S)

5. Übungsblatt

für den 20. April 2015

1. Seien
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie, falls existent, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}.

2. Finden Sie invertierbare Matrizen von möglichst kleinem Format, sodass
$$(A \cdot B)^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}.$$

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, für die es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^n = 0$. Zeigen Sie, dass $E_m - A$ invertierbar ist. (E_m bezeichnet die $m \times m$-Einheitsmatrix.)

   Hinweis: Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an die Summenformel für die geometrische Reihe.

4. Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie (ohne Verwendung von Satz 2.20), dass es dann genau eine Matrix B gibt, die $B \cdot A = E_n$ erfüllt.

5. Seien
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^2, A^3, A^{-1}, A^T, B^T.

6. Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme die Lösungsmengen sowohl in möglichst einfacher impliziter als auch in parametrisierter Darstellung an:

   (a)
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ 4y - 6x &= -12, \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x - 4y &= 3 \\ 3x - y &= -2 \\ 2x + 3y &= -5. \end{aligned}$$

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

8. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem $ax + by = 0, cx + dy = 0$ **genau dann** eine Lösung (x, y) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ hat, **wenn** $ad - bc = 0$.