# Algebra für Informatik (2015S)

10. Übungsblatt

für den 8. Juni 2015

1. Es sei $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix})$ und $U = L(B)$.

   (a) Welcher Vektor $w$ hat bezüglich $B$ die Koordinaten $(w)_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

   (b) Welche Koordinaten hat $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ bezüglich $B$?

   (c) Versuchen Sie die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bezüglich $B$ zu bestimmen.

2. Bestimmen Sie alle Vektoren

   (a) im $\mathbb{R}^3$, die auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ normal stehen.

   (b) im $\mathbb{R}^4$, die auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal stehen.

3. Gegeben seien die Vektoren
   $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie jeweils eine Basis und die Dimensionen von:

   (a) $\{x_1\}^\perp$,

   (b) $\{x_1, x_2\}^\perp$,

   (c) $\{x_1, x_2, x_3\}^\perp$,

   (d) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^\perp$.

4. Gegeben seien die folgenden Basen und Vektoren:

   (a) $B_1 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$,

   $(v_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $B_2 = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix})$,

$(v_2)_{B_2} = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$.

(c) $B_3 = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \frac{-1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix})$,

$(v_3)_{B_3} = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$.

(d) $B_4 = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$,

$(v_4)_{B_4} = \begin{pmatrix}4\end{pmatrix}$.

(e) $B_5 = (\begin{pmatrix}0.6\\0.8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0.8\\0.6\end{pmatrix})$,

$(v_5)_{B_5} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

Welche davon sind Orthonormalbasen. Berechnen Sie alle $\|v_i\|$.

5. Orthonormalisieren Sie die folgende Familie von Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt:

$$A = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}).$$

6. (a) Geben Sie eine Orthonormalbasis der Ebene $e : 2x - y + 3z = 0$ an.
   (b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für folgenden Unterraum:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+2x_3+2x_4 = 0 \text{ und } x_2-2x_3+2x_4 = 0\}.$$

7. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

8. Sei $B$ eine Orthonormalbasis von $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\langle v, w\rangle = \langle (v)_B, (w)_B\rangle.$$