3. ÜBUNGSSTUNDE - 26.3.2015

(1) Wir haben eine seltsame Idee und wollen die schrecklich schwierige Aufgabe, 19+23 zu addieren, komplizierter lösen. Es ist ja egal, ob man dies im Bereich der reellen Zahlen, der rationalen Zahlen oder der natürlichen Zahlen macht. Man kann es auch modulo n rechnen, vorausgesetzt, n ist sicher größer als die erwartete Summe. Das kann man weiter ausbauen. Wir zerlegen das n unserer Wahl in Primzahlpotenzen: $n = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}$. Wir nehmen sodann die Zahlen $a, b, \dots$, die wir addieren oder multiplizieren wollen und berechnen ihre Reste $[a]_{p_1^{t_1}}$ etc. nach Division durch $p_1^{t_1}$, u.s.w. Wir machen dies für unser Beispiel $19 + 23$ und wählen $n = 60 = 4 * 3 * 5$:

19 gibt die Reste $([19]_4, [19]_3, [19]_5) = ([3]_4, [1]_3, [4]_5)$
23 gibt die Reste $([23]_4, [23]_3, [23]_5) = ([3]_4, [2]_3, [3]_5)$.

Kann man sagen, dass $19 + 23$ dann die Reste $([6]_4, [3]_3, [7]_5) = ([2]_4, [0]_3, [2]_5)$ hat, dass man also die Reste in jeder Komponente einfach addieren kann?

Gilt dasselbe auch für's Subtrahieren und Multiplizieren?

*** Ja, weil aus $a \equiv b (mod\, n)$ und $c \equiv d (mod\, n)$ auch $a \pm c \equiv b \pm d (mod\, n)$ und $ac \equiv bd (mod\, n)$ folgen. ***

Und wie bekommt man dann das ersehnte $19 + 23$? Berechnen Sie $19 + 23$ aus den Resten!

***Durch den Chinesischen Restsatz; 42 ***

Und macht das alles überhaupt Sinn?

***Jein. Nicht in diesem Beispiel. Aber wenn man mit den selben Zahlen immer und immer wieder rechnen muss (zum Beispiel bei der Berechnung von Determinanten), macht es sehr wohl Sinn, diese Zahlen einmal in Folgen von Resten zu verwandeln und am Schluß EINMAL den Chinesischen Restsatz zu verwenden!

2. Aufgabe (1) von 1.24

Routine

3. Aufgabe (1) von 1.28

Routine

4. Aufgabe (1) von 1.33

Routine

5. Wir schreiben das Jahr 2015. Die Zahl 2015 teilt auch 6045, 4030 und 8060. Zeigen Sie OHNE RECHNUNG, dass 2015 dann auch die Determinante von

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ teilt. Können Sie dieses Ergebnis verallgemeinern?

***$2015 = 5 * 13 * 31$; also ist jede Komponente von $A \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2015 \\ 6045 \\ 4030 \\ 8060 \end{pmatrix}$ kongruent zu 0 modulo 5, modulo 13 und modulo 31. Also ist $det(A)$ kongruent zu 0 modulo $5, 13\, und\, 31$, nach dem Chinesischen Restsatz also auch kongruent 0 modulo 2015. Somit ist $det(A)$ also durch 2015 teilbar.

Dasselbe gilt aber für jede (!) natürliche Zahl n anstatt 2015. Und auch für alle Formate, nicht nur für 4×4. ***