# Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
# Übungsblatt 2

19.03.2015

1. Seien $a, b, x \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{Z}$ so, dass $x = ua + vb$. Zeigen Sie: Wenn sowohl $x \mid a$ als auch $x \mid b$, dann gilt $x = \mathrm{ggT}(a, b)$. Können Sie aus der Gleichung $ab + cd = 1$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z})$ Aussagen über $\mathrm{ggT}(a, b)$, $\mathrm{ggT}(a, c)$, $\mathrm{ggT}(a, d)$, $\mathrm{ggT}(b, c)$, $\mathrm{ggT}(b, d)$ und $\mathrm{ggT}(c, d)$ ableiten?

2. Finden Sie eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $71u + 79v = \mathrm{ggT}(71, 79)$. Ist diese Lösung eindeutig? Falls nein, geben Sie eine weitere Lösung an.

3. Wir betrachten die sogenannten *Fibonacci-Zahlen* $F_n$, die folgendermaßen rekursiv definiert sind:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

   Begründen Sie, dass die Zahlen $F_n$ und $F_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ teilerfremd sind. Gilt das für beliebige Startwerte $F_0$ und $F_1$?

4. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a < b$. Wir nehmen an, dass der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung von $\mathrm{ggT}(a, b)$ genau $n$ Schritte (Divisionen) benötigt. Zeigen Sie, dass dann $a \geq F_n$ gilt, wobei $F_n$ wieder die $n$-te Fibonacci-Zahl bezeichnet. Beweisen Sie zudem die Ungleichung $F_n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ und leiten Sie damit eine obere Schranke für $n$ in Abhängigkeit von $a$ her. Wie hängt diese Schranke mit der Anzahl der Ziffern von $a$ zusammen?

5. Wir betrachten die sogenannten *Fermat-Zahlen* $f_k = 2^{2^k} + 1$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Zeigen Sie die Rekursionsformel $f_n = \prod_{i=0}^{n-1} f_i + 2$ mittels vollständiger Induktion.

   (b) Verwenden Sie diese Formel um zu zeigen, dass zwei verschiedene Fermatzahlen stets teilerfremd sind, also $\mathrm{ggT}(f_k, f_l) = 1$ für $l \neq k$.

   (c) Warum folgt aus Punkt (b), dass es unendlich viele Primzahlen gibt?