Einführung in die Algebra, Übung 4 am 16.04.2015

1. Ist der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$
   a. Ein Integritätsbereich?
   b. Ein Hauptidealbereich?
2. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $I \trianglelefteq R, J \trianglelefteq R$ Ideale von R.
   Zeigen Sie:
   a. $I + J := \{i + j \,|\, i \in I, j \in J\} \trianglelefteq R$. Zeigen Sie, dass $I + J$ das von der Menge $I \cup J$ erzeugte Ideal ist.
   b. $\sqrt{I} := \{x \in R \,|\, x^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} \trianglelefteq R$ und $I \subseteq \sqrt{I}$.
3. Zeigen Sie 2.7,Nr.3.
4. Ein kommutativer Ring R mit Einselement heißt Körper, wenn $|R| \geq 2$ ist und jedes $0 \neq r \in R$ invertierbar ist.
   Zeigen Sie 2.11,Nr.4.
5. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Dann ist die Menge der formalen Potenzreihen $R[[x]] := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \,|\, a_i \in R\}$ mit den Operationen $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i) + (\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i) := \sum_{i=0} (a_i + b_i) x^i$ und $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$
   für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Zeigen Sie:
   $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$ ist invertierbar $\Longleftrightarrow$ a_0 ist in R invertierbar

.