Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Übungsblatt 5

23.04.2015

1. (Beispiel 2.11, (1)) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:
   (a) Das Produkt invertierbarer Elemente ist wieder invertierbar.
   (b) Jeder Teiler eines invertierbaren Elements ist wieder invertierbar.
   (c) Ein Element $r \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn das von r erzeugte Ideal (r) gleich ganz R ist.

2. (Beispiel 2.11, (2)) Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich R ($|R| \geq 2$) ein Körper ist. (*Hinweis:* Begründen Sie, dass für jedes $r \in R\backslash\{0\}$ die Abbildung $f_r : R \to R;\ x \mapsto r \cdot x$ bijektiv ist).

3. Wir betrachten die Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Wir definieren darauf folgende Operationen:

$$(a + b\sqrt{2}) \oplus (c + d\sqrt{2}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
$$(a + b\sqrt{2}) \odot (c + d\sqrt{2}) := (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

   (a) Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \oplus, \odot)$ ein Integritätsbereich ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \oplus, \odot)$ sogar ein Euklidischer Bereich ist.
   (c) Ist $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \oplus, \odot)$ ein Körper?

4. Wir betrachten die Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Wir definieren darauf folgende Operationen:

$$(a + b\sqrt{-5}) \oplus (c + d\sqrt{-5}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{-5}$$
$$(a + b\sqrt{-5}) \odot (c + d\sqrt{-5}) := (ac - 5bd) + (ad + bc)\sqrt{-5}$$

   Zusätzlich definieren wir eine Norm durch $\|a + b\sqrt{-5}\| = \sqrt{a^2 + 5b^2}$. Begründen Sie, dass $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}], \oplus, \odot)$ ein Integritätsbereich ist und zeigen Sie, dass $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel, aber nicht prim ist.

5. Sei n eine natürliche Zahl mit $n \equiv 3 \pmod 4$. Begründen Sie, dass es keine $a, b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n = a^2 + b^2$.