Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Übungsblatt 8

21.05.2015

1. Sei $(G, \cdot, i, e)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in G$ die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung hat und folgern Sie daraus, dass stets $i(e) = e$ und $i(x \cdot y) = i(y) \cdot i(x)$ für alle $x, y \in G$ gilt.

Definition 1 *Seien g, h Elemente einer Gruppe $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$. Dann nennen wir g und h konjugiert, falls es ein $x \in G$ gibt mit $g = xhx^{-1}$. Wir schreiben dann $g \sim h$.*

2. Zeigen Sie, dass die oben definierte Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Warum ist die Relation $\sim$ nur für nicht-abelsche Gruppen interessant?

3. Wie jede Äquivalenzrelation teilt die Konjugationsrelation $\sim$ die Elemente einer Gruppe G in mehrere Äquivalenzklassen auf. Finden Sie diese Äquivalenzklassen für die Permutationsgruppe S_3 (vgl. Beispiel 4.13 im Skript).

Definition 2 *Seien $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ und $(H, \odot, ^{-1_H}, 1_H)$ Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn*

1. $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \odot \varphi(g_2)$ *für alle* $g_1, g_2 \in G$,
2. $\varphi(g_1^{-1}) = (\varphi(g_1))^{-1_H}$,
3. $\varphi(1) = 1_H$. *(vgl. Definition 4.20 im Skript).*

Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus heißt (Gruppen-)Isomorphismus. Zwei Gruppen G und H heißen isomorph, wenn es zwischen ihnen einen Isomorphismus gibt.

4. Zeigen Sie, dass die beiden zyklischen Gruppen $(\mathbb{Z}_n, +)$ und $G_n := (\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}, \cdot)$ aus Beispiel 4.8 isomorph sind. Überlegen Sie dafür zunächst, wie die Elemente von G_n aussehen (Stichwort: Einheitswurzeln).

5. Eine bequeme Methode, eine Gruppe anzugeben, sind definierende Relationen. Wir betrachten die Trägermenge
$$\{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$
mit den definierenden Relationen $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$ und $ba = a^3b$. Die entstehende Gruppe nennen wir Q_3. Stellen Sie die Gruppentafel von Q_3 auf. Gilt $Q_3 = D_4$?