Einführung in die Algebra , Übung 10

1. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe D_4 .

   Lösung: $a :=$Drehung um $90°$, $b :=$ Spiegelung um y-Achse.

   1-el: $\{id\}$, 2-el: $\{1, a^2\}$, $\{1, b\}$, $\{1, ab\}$, $\{1, a^2b\}$, $\{1, a^3b\}$, 4-el: $\{1, a, a^2, a^3\}$, $\{1, a^2, b, a^2b\}$, $\{1, a^2, ab, a^3b\}$,8-el: D_4

2. Sei $H = \langle 4 \rangle$ die durch das Element $[4]_{12}$ erzeugte Untergruppe der Gruppe $(\mathbb{Z}_{12}, +)$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen (die sogenannten Linksnebenklassen) bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_H$.

   Lösung: $H = \{4, 8, 0\}$. Nach dem Satz von Lagrange gibt es die 4 Linksnebenklassen $H = \{4, 8, 0\}$, $2 + H = \{6, 10, 2\}$, $3 + H = \{7, 11, 3\}$, $5 + H = \{9, 1, 5\}$.

3. Bestimmen Sie alle Gruppenendomorphismen der Gruppe $(\mathbb{Z}_n, +)$, $n \in \mathbb{N}$. Welche davon sind Automorphismen?

   $E(\mathbb{Z}_n) = \{h_k \,|k \in \mathbb{Z}_n\}$, wobei $h_k(x) = kx$, für $x \in \mathbb{Z}_n$, da jeder Endomorphismus h durch $h(1) := k$ eindeutig bestimmt ist. $h_k \in Aut(\mathbb{Z}_n) \iff k$ ist invertierbar in $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot) \iff ggt(k, n) = 1$(dann ist $h_k^{-1} = h_{k^{-1}}$)

4. 4.45, Bsp.3 im Skriptum

   D_4 operiert auf den "surjektiven" Färbungen $X := \{x : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{r, b, g\} \,|x$ ist surjektiv$\}$ durch $(gx)(z) = x(g^{-1}(z))$, $z \in \{1, 2, 3, 4\}$.

   Dann gilt: $|Fix(id)| = |X| = 36, |Fix(s_1)| = |Fix(s_2)| = 6$

   (s_1, s_2 sind die Diagonalspiegelungen). Für alle anderen $g \in D_4$ gilt $|Fix(g)| = 0$. Somit gibt es $\frac{1}{8}.(36 + 6 + 6) = 6$ verschiedene Färbungen.

5. 4.45, Bsp.4 im Skriptum

   Die $S_3 = \{id, (r, b), (r, g), (b, g), (r, b, g), (r, g, b)\}$ operiert auf der Menge $X = \{x : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{r, b, g\}\}$ durch $(gx)(z) := g(x(z))$ für alle $g \in S_3, x \in X, z \in \{1, 2, 3, 4\}$.

   Dann gilt: $|Fix(id)| = |X| = 3^4$, für jede Transposition g gilt $|Fix(g)| = 1$, $|Fix((1, 2, 3))| = |Fix((1, 3, 2))| = 0$. Die Anzahl der verschiedenen Färbungen ist gleich $\frac{1}{6}.(81 + 1 + 1 + 1) = 14$

.