Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
Übungsblatt 11

18.06.2015

1. Unter einer Partition einer natürlichen Zahl n versteht man die Darstellung dieser Zahl als Summe von natürlichen Zahlen größer gleich 1. Wir betrachten zwei Partitionen als gleich, wenn genau die gleichen Summanden vorkommen (die Reihenfolge ist egal). Mit $P(n)$ bezeichnen wir die Anzahl aller verschiedener Partitionen von n. Zum Beispiel sind 3, $2+1$ und $1+1+1$ die einzigen drei Partionen der Zahl 3, also $P(3) = 3$. Bestimmen Sie $P(n)$ für $n = 4, 5, 6$!

   Lösung. Es gilt $P(4) = 5$ (1+1+1+1, 2+1+1, 2+2, 3+1, 4), $P(5) = 7$ (1+1+1+1+1, 2+1+1+1, 2+2+1, 3+1+1, 3+2, 4+1, 5) und $P(6) = 11$ (1+1+1+1+1+1, 2+1+1+1+1, 2+2+1+1, 2+2+2, 3+1+1+1, 3+2+1, 3+3, 4+1+1, 4+2, 5+1, 6). □

2. Aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen kann man folgendes „Rezept" zur Bestimmung aller abelschen Gruppen der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ herleiten:

   - Finden Sie die Primfaktorzerlegung von n; also $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.
   - Finden Sie für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ alle Partitionen von α_i und bilden Sie für jede Partition $\alpha_i = \ell_1 + \cdots + \ell_m$ das direkte Produkt $\mathbb{Z}_{p_i^{\ell_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_i^{\ell_m}}$.
   - Wählen Sie für jedes α_i, $i \in \{1, \dots, k\}$, eine Partition und das dazugehörige direkte Produkt aus Schritt 2 aus und bilden Sie das direkte Produkt davon. Wenn Sie alle möglichen Kombinationen durchlaufen, erhalten Sie alle (paarweise nicht isomorphen) abelschen Gruppen der Ordnung n.

   Wie viele abelsche Gruppen der Ordnung $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ gibt es also (bis auf Isomorphie)? Geben Sie eine allgemeine Formel an und berechnen Sie damit die Anzahl der abelschen Gruppen der Ordnung 15552 (bis auf Isomorphie).

   Lösung. Die Anzahl der abelschen Gruppen der Ordnung $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ ist $\prod_{i=1}^{k} P(\alpha_i)$. Da $15552 = 3^5 \cdot 2^6$, gibt es $P(5) \cdot P(6) = 7 \cdot 11 = 77$ abelsche Gruppen der Ordnung 15552. □

3. Verwenden Sie das „Rezept" aus Beispiel 2, um alle abelschen Gruppen der Ordnung 100 explizit anzugeben. Vereinfachen Sie diese mit Hilfe der Isomorphie $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ für $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ so weit wie möglich. *(Beispiel: Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, weil $\mathrm{ggT}(2, 3) = 1$, aber nicht isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$, weil $\mathrm{ggT}(2, 6) = 2$.)*

Lösung. Es ist $100 = 5^2 \cdot 2^2$, also $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$. Die jeweiligen Partitionen sind $1 + 1$ und 2. Im zweiten Schritt des „Rezepts“ bilden wir also für $i = 1$ die Produkte $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_4$ und für $i = 2$ die Produkte $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_{25}$. Wir erhalten also die folgenden vier abelschen Gruppen der Ordnung 100:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10},\\
&(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_{25} \cong \mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_2,\\
&\mathbb{Z}_4 \times (\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_5,\\
&\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25} \cong \mathbb{Z}_{100}.
\end{aligned}
$$

□

4. Sei (V, E, I) ein Graph. Zeigen Sie $|I| = \sum_{v \in V} \mathrm{Grad}(v)$ sowie $|I| = 2 \cdot |E|$ und folgern Sie daraus, dass jeder Graph eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades hat.

   Lösung. Zum einen gilt

   $$|I| = \sum_{v \in V} |\{e \in V | (v, e) \in I\}| = \sum_{v \in V} \mathrm{Grad}(v),$$

   zum anderen ist

   $$|I| = \sum_{e \in E} |\{v \in V | (v, e) \in I\}| = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|.$$

   Insgesamt gilt also

   $$\underbrace{2|E|}_{(1)} = \sum_{v \in V} \mathrm{Grad}(v) = \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ \mathrm{Grad}(v)\ \text{gerade}}} \mathrm{Grad}(v)}_{(2)} + \underbrace{\sum_{\substack{v \in V \\ \mathrm{Grad}(v)\ \text{ungerade}}} \mathrm{Grad}(v)}_{(3)}.$$

   Da die Terme (1) und (2) offensichtlich gerade sind, muss auch (3) gerade sein. Das kann aber nur der Fall sein, wenn die Anzahl der Summanden in (3) gerade ist, wenn also die Anzahl von Knoten ungeraden Grades gerade ist. □

5. Wir wollen eine Österreichkarte mit den Bundesländern so färben, dass zwei Bundesländer, die eine gemeinsame Grenze haben, verschiedene Farben haben (behandeln Sie Osttirol wie ein eigenes Bundesland). Übersetzen Sie diese Aufgabe in ein graphentheoretisches Problem und finden Sie eine geeignete Färbung . Wieviele Farben brauchen Sie höchstens? Überprüfen Sie an Ihrem „Österreich-Graphen“, ob die Eulersche Flächenformel (Satz 6.11) tatsächlich erfüllt ist.

   Lösung. Wir stellen die Bundesländer als Knoten eines Graphen dar und verbinden zwei Knoten genau dann mit einer Kante, wenn die entsprechenden Bundesländer eine gemeinsame Grenze haben. Der Graph sieht dann aus wie in der Abbildung. Wir müssen eine Färbung der Knoten finden, sodass zwei Knoten eine unterschiedliche Farbe haben, wenn zwischen ihnen eine Kante verläuft. Eine mögliche Färbung ist in der Abbildung dargestellt. Man sieht, dass in diesem Fall sogar 3 statt 4 Farben ausreichen. Zwei Farben reichen natürlich nicht aus. Man liest aus der Abbildung ab, dass für diesen Graphen gilt: $v = 10$, $e = 14$, $f = 6$. Die Flächenformel $v - e + f = 2$ ist also erfüllt.

□

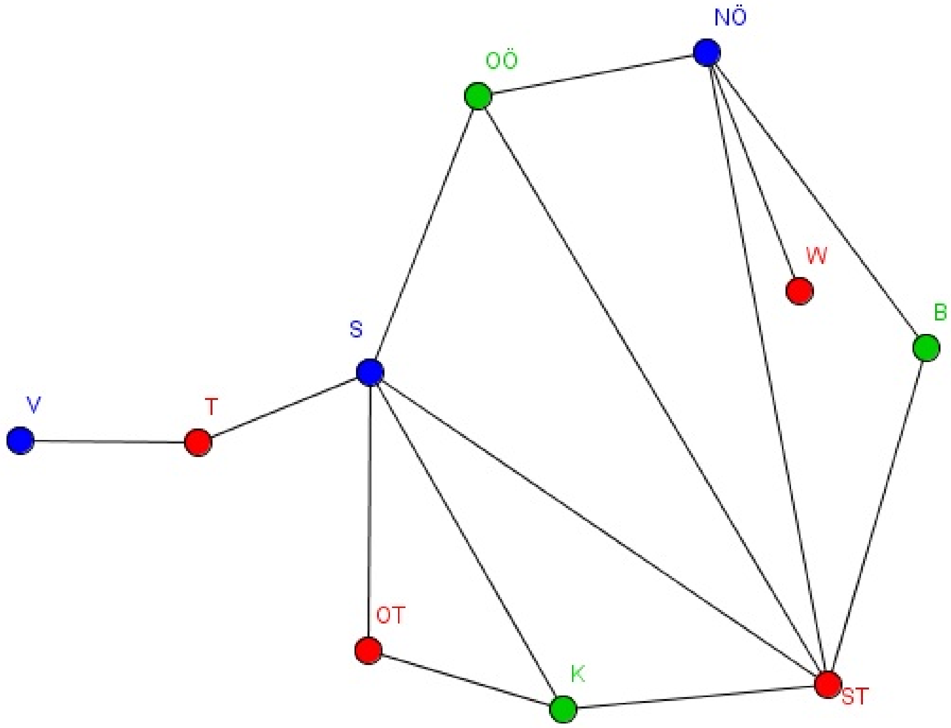

Abbildung 1: Der „Österreich“-Graph