

## Logik als Arbeitssprache

### 1. Übungsblatt für den 24.3.2015

- (1) (Funktionen) Seien  $A$  und  $B$  Mengen, und sei  $f$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$ . Welche Eigenschaften muss  $f$  haben, damit  $g := \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f\}$  eine Funktion von  $A$  nach  $B$  ist?
- (2) (Wohldefiniertheit) Für welche  $a \in \mathbb{Z}$  ist die Abbildung  $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $[x]_m \mapsto [ax]_n$  wohldefiniert? Was ist die Relation, deren Funktionalität Sie dabei zeigen?
- (3) (Boole'sche Ausdrücke) Zeigen Sie, dass es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Wahrheitsfunktion  $f : \{T, F\}^n \rightarrow \{T, F\}$  gibt, die sich nicht durch einen Boole'schen Ausdruck der Länge  $\leq \frac{2^n - 2}{n}$  darstellen lässt. Dabei ist die *Länge* eines Boole'schen Ausdrucks die Anzahl der Zeichen aus  $\{(\ , \ ), \sim, \vee, \wedge\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$  in diesem Ausdruck. (Bsp.:  $L(\sim(x_1 \vee x_2)) = 6$ .)
- (4) (Erfüllbarkeit) Zeigen Sie, dass ein Boole'scher Ausdruck  $\varphi$  genau dann unerfüllbar ist, wenn  $\sim\varphi$  allgemeingültig ist.