Algebra für Informatik (2016S)

4. Übungsblatt

für den 18. April 2016

1. Beweisen Sie Satz 2.9: Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, und seien $A, B \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Dann gilt

   $$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C).$$

   Hinweis: Berechnen Sie von beiden Matrizen den (i, j)-ten Eintrag.

2. Finden Sie eine Matrix X, sodass $A \cdot X = B$, wobei

   $$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Jede Spalte von X entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $A, B, E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei E_n die Einheitsmatrix vom Format $n \times n$ ist. Bestimmen Sie, welche von den folgenden Gleichungen im Allgemeinen gültig sind. Verbessern Sie diejenigen Gleichungen, die nicht allgemein gelten, indem Sie die rechte Seite der Gleichung verändern. Anmerkung: Für eine $n \times n$-Matrix X und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

   $$X^k := \underbrace{X \cdots X}_{k-\text{faches Produkt}}.$$

   (a)

   $$(A + B)^2 = A^2 + B^2$$

   (b)

   $$(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$$

   (c)

   $$(A + E_n)^2 = A^2 + 2A + E_n$$

   (d)

   $$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B$$

   (e)

   $$(AB + BA)^T - (AB)^T = A^T \cdot B^T$$

4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie: A^2, A^T, $(A^T)^T$, $A \cdot A^T$, $A^T \cdot A$.

5. Seien A, B Matrizen, sodass $A \cdot B$ definiert ist.

   (a) Wenn die dritte Spalte von B ein Nullvektor ist, wie kann man dann die dritte Spalte von $A \cdot B$ darstellen?

   (b) Wenn die dritte Spalte von B ein Vektor ist, der gleich der Summe der ersten beiden Spalten (von B) ist, wie kann man dann die dritte Spalte von $A \cdot B$ darstellen?

6. Finden Sie zwei Matrizen A und B, sodass

   - weder A noch B eine Einheitsmatrix ist,
   - weder A noch B eine Nullmatrix ist,
   - $A \neq B$ und
   - $A \cdot B = B \cdot A$.

7. Nehmen Sie an, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   die Eigenschaften $A \cdot B_1 = B_1 \cdot A$ und $A \cdot B_2 = B_2 \cdot A$ besitzt, wobei

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Beweisen Sie, dass dann $A = \lambda E_2$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten muss. Welchen Wert muss λ haben?

8. Beweisen Sie, dass Multiplikation mit der Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   die Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ um den Winkel θ rotiert. Wie kann man diese Drehung rückgänig machen? Hinweis: Die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus könnten hier nützlich sein.