Algebra für Informatik (2016S)

5. Übungsblatt, mit Lösungen

für den 25. April 2016

1. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq bc$ die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und dass
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
gilt.

2. Nehmen wir an, dass die $n \times n$-Matrizen A, B und $A + B$ invertierbar sind. Beweisen Sie, dass
$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A.$$

3. Gegeben seien zwei $n \times n$-Matrizen A und B, sodass $E_n - B \cdot A$ invertierbar ist. Beweisen Sie, dass $E_n - A \cdot B$ auch invertierbar ist und geben Sie eine Formel für $(E_n - AB)^{-1}$, ausgedrückt durch $A, B, (E_n - BA)^{-1}$ und E_n, an. Hinweis: Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

4. Finden Sie invertierbare Matrizen von möglichst kleinem Format, sodass
$$(A \cdot B)^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}.$$

5. Mischt man die Sorte „Exklusiv“ zu 7,- EUR je kg mit der Sorte „Premium“ zu 3,- EUR je kg, so kostet die Mischung insgesamt 320,- EUR. Vertauscht man dagegen die Mengen der beiden Sorten, so kostet die Gesamtmischung 40,- EUR mehr. Wieviel kg nimmt man von jeder Sorte?

6. Lösen Sie die Gleichungssysteme

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

7. Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ -x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

8. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ **genau dann** eine Lösung (x, y) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ hat, **wenn** $ad - bc = 0$. Gibt es in diesem Fall eine Eindeutige Lösung?