

Algebra für Informatik (2016S)

0. Übungsaufgaben, mit Lösungen

für den 7. März 2016

1. Von einem Parallelogramm mit den Eckpunkten A, B, C, D sind die Punkte

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes A .

Lösung:

$$A = B + (A - B) = B + (D - C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

oder

$$A = D + (A - D) = D + (B - C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dabei wurde das Vorurteil verwendet, dass der Vektor von B nach A derselbe ist wie der von C nach D , d.h., dass zwischen A und C eine Diagonale liegt.

Natürlich gibt es noch zwei andere Lösungen, entsprechend den anderen beiden Annahmen, dass eine Diagonale zwischen A und D bzw. zwischen A und B liegt:

$$A = C + (A - C) = C + (B - D) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$A = C + (A - C) = C + (D - B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2. Bestimmen Sie die Längen aller Seiten sowie der Diagonalen des Parallelogramms aus Beispiel 1.

Lösung:

Für die Standardlösung:

$$\|B - A\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\|D - A\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3.162.$$

$$\|C - A\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3.162.$$

$$\|D - B\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx 4.243. \quad \square$$

3. Bei einem Baumstamm wird ein Umfang von 2.55 m und ein Durchmesser von 0.82 m gemessen. Kann der Baumstamm einen kreisförmigen Querschnitt haben?

Lösung:

Wenn der Querschnitt ein Kreis ist, dann muss das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser gleich π sein.

$$\frac{2.55}{0.82} \approx 3.109756 < \pi.$$

Zur Genauigkeit: Die Längen sind offenbar auf cm genau angegeben. Sie könnten daher auch einen halben cm nach oben oder unten abweichen. Schlimmstenfalls ergibt sich dann $\frac{2.555}{0.815} \approx 3.134969$, was aber immer noch kleiner als π ist. \square

4. Aus einer Torte mit einem Durchmesser von 28 cm wird ein Stück herausgeschnitten, sodass beim Umfang schließlich 5 cm fehlen. Wie groß ist der Winkel (in Grad und im Bogenmaß)?

Lösung:

Wir besinnen uns darauf, dass die Größe eines Winkels das Verhältnis von Bogenlänge zum Radius ist, also

$$\alpha = \frac{5}{14} = 0.357143 = 20.4628^\circ.$$

□

5. Wir bewegen uns auf einem Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{3}{3})$ und starten im Punkt $(\frac{8}{3})$. In welchem Punkt befinden wir uns, nachdem wir uns 7 Einheiten entlang der Kreislinie gegen den Uhrzeigersinn fortbewegt haben? Wie weit haben wir uns vom Ausgangspunkt entfernt?

Lösung:

$$r = 8 - 3 = 5.$$

$$\alpha = \frac{7}{5} = 1.4 \approx 80.2141^\circ.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0.1699 \\ 0.9854 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.850 \\ 7.927 \end{pmatrix}.$$

$$\| \begin{pmatrix} 3.849 \\ 7.927 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \| \approx \| \begin{pmatrix} -4.150 \\ 4.927 \end{pmatrix} \| \approx 6.442. \quad \square$$

6. Ein Dach hat eine Neigung von 25° und eine Länge von 12 m (gemessen vom oberen zum unteren Rand). Wie hoch ist es?

Lösung:

Die Dachhöhe sei mit h bezeichnet. Dann gilt:

$$\sin(25^\circ) = \frac{h}{12 \text{ m}}.$$

Somit

$$h = \sin(25^\circ) \cdot 12 \text{ m} \approx 0.422618 \cdot 12 \text{ m} \approx 5.07142 \text{ m}.$$

□

7. Der von zwei Seiten der Längen 10 bzw. 7 eines Dreiecks eingeschlossene Winkel beträgt 60° . Wie lang ist die dritte Seite?

Lösung:

$$c^2 = 10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cos(60^\circ) = 100 + 49 - 140 \cdot \frac{1}{2} = 79.$$

$$c = \sqrt{79} \approx 8.881944. \quad \square$$

8. Zeigen Sie, dass die Summe aller Winkel in einem Dreieck stets ein gestreckter Winkel ist.

Hinweis: Legen Sie durch die Spitze eine Parallele zur Grundlinie und verwenden Sie dann, dass Parallelwinkel gleich groß sind.

Lösung:

Anmerkung: Sollte eine einfache Übung zum richtigen Argumentieren in Beweisen sein. □