Algebra für Informatik (2016S)

1. Übungsblatt, mit Lösungen

für den 14. März 2016

1. Gegeben seien die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Vektor v, der von P nach Q führt.

(b) Zu welchem Punkt führt v, wenn man in P bzw. Q bzw. im Nullpunkt startet?

(c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M von P und Q.

(d) Zu welchem Punkt führt v, wenn man in M startet?

Lösung:
$v = Q - P = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$.
$P + v = Q$.
$Q + v = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \end{pmatrix}$.
$O + v = v$.
$M = \frac{1}{2}(P + Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$M + v = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$. □

2. Von einem Parallelogramm mit den Eckpunkten A, B, C, D (A gegenüber von C) und Mittelpunkt M (Schnitt der Diagonalen) sind die Punkte

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Punkte sowie die Längen der Diagonalen.

Lösung:
$D = M + (D - M) = M + (M - B) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$A = B + (A - B) = B + (D - C) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
$e = C - A = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$f = D - B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$\|e\| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8.48528$.
$\|f\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.47214$.
□

3. Vor langer Zeit wurde einem Forscher am Rande der Wüste von einem Ort 20 Kameltagesreisen weiter südlich berichtet, wo zur Sommersonnenwende die Sonne sich mittags am Grunde der tiefsten Brunnen spiegelt. Er stellte nun fest, dass die Sonne am Ort seiner Wirkungsstätte zu dieser Zeit zwar auch hoch am Himmel steht, aber mit der vertikalen Linie immer noch einen Winkel von $7°12'$ einschließt. Wie konnte unser Forscher damit den Durchmesser der Erde bestimmen? Und wie lange ist folglich eine Kameltagesreise?

   Lösung:
   So wie damals nehmen wir an, dass die Sonne ausreichend weit weg ist, sodass man die Sonnenstrahlen als parallel annehmen kann. Weiters nehmen wir für die Erde eine perfekte Kugelgestalt an, z.B. weil wir bei Mondfinsternissen festgestellt haben, dass deren Schatten immer kreisförmig ist.

   Der Forscher wohnt offensichtlich auf einer Breite $7°12'$ nördlich eines Wendekreises (Skizze!). Dieser Winkel ist ein Fünfzigstel des Vollwinkels. Der Erdumfang ist also das 50-fache der Entfernung (Nord-Süd-Richtung) und beträgt dahr $50 \cdot 20 = 1000$ Kameltagesreisen.

   Da der Erdumfang bekanntlich ca. 40 000 km beträgt, entspricht eine Kameltagesreise 40 km. □

4. Ein Dreieck hat die Seitenlängen 5, 7, und 9. Bestimmen Sie die Größe der Winkel.

   Lösung:
   $a = 5$, $b = 7$, $c = 9$.
   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.
   $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{5^2+7^2-9^2}{2\cdot 5\cdot 7} = -\frac{1}{10} = -0.1$.
   $\gamma \approx 1.67096 \approx 95.73917°$.
   $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{7^2+9^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{5}{6} \approx 0.8333333$.
   $\alpha \approx 0.5856855 \approx 33.5573°$.
   $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{5^2+9^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 7} = \frac{19}{30} \approx 0.633333$.
   $\beta \approx 0.884943 \approx 50.7035°$.
   $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. □

5. Der Winkel zwischen den gleichen Schenkeln eines gleichschenkeligen Dreiecks beträgt $50°$, die Länge der diesem gegenüberliegenden Seite ist 5 m. Berechnen Sie die restlichen Seitenlängen und Winkel.

   Lösung:
   $\gamma = 50°$, $c = 5$, $a = b$.
   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 2a^2 - 2a^2\cos\gamma = 2a^2(1-\cos\gamma)$.
   $a^2 = \frac{c^2}{2(1-\cos\gamma)} = \frac{5^2}{2(1-\cos(50°))} \approx \frac{25}{2(1-0.6427876)} \approx 34.993187$.
   $a \approx \sqrt{34.993187} \approx 5.91550395788$.

□

6. Der Eckpunkt A eines Dreiecks hat die Koordinaten $(1, 0)$. Der Vektor $B - A$ hat dieselbe Richtung wie der Vektor $(4, 3)$, aber die Länge 20. Der Vektor $C - A$ ist parallel zum Vektor $(0, 1)$, und der Vektor $C - B$ ist parallel zum Vektor $(-1, 1)$. Berechnen Sie alle Punkte des Dreiecks, die Längen aller Seiten sowie die Größe aller Winkel.

   Lösung:

   $B - A = 20\frac{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}{\|\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\|} = 20\frac{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}{5} = 4\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\12\end{pmatrix}.$

   $B = A + (B - A) = \begin{pmatrix}17\\12\end{pmatrix}.$

   $C = A + (C - A) = A + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}.$

   $C = B + (C - B) = B + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17-\mu\\12+\mu\end{pmatrix}.$

   Wir lösen:

   $$1 = 17 - \mu$$
   $$\lambda = 12 + \mu$$

   und erhalten:

   $$\mu = 16$$
   $$\lambda = 28$$

   Somit: $C = \begin{pmatrix}1\\28\end{pmatrix}.$

   $C - A = \begin{pmatrix}0\\28\end{pmatrix}.$

   $C - B = \begin{pmatrix}-16\\16\end{pmatrix}$ □

7. Sie verlassen eine gerade Straße, die die beiden Orte A und B verbindet. Bevor Sie B erreichen, haben Sie jedoch Zweifel, ob das der richtige Weg ist, und gehen geradeaus in eine andere Richtung weiter, bis Sie sich nach 10 km um 140° nach rechts drehen und dabei den Ort B gerade vor sich sehen. Sie gehen nun geradeaus auf B zu und müssen dabei noch 5 km zurücklegen. Wie groß ist die Strecke auf der geraden Straße zwischen A und B, die sie nicht benutzt haben?

   Lösung:

   Sei A der Abzweigungspunkt, und C der, an dem man sich dreht. Dann entsteht ein Dreieck. Sei
   γ der Winkel bei C,
   $b = \|A - C\|$,
   $a = \|B - C\|$.
   Dann ist $\gamma = \pi - 140° = 40°$, $a = 5$, $b = 10$.
   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos(40°) \approx 48.395555688.$
   $c \approx 6.95669143.$ □

8. Es seien A, B und C drei Punkte auf einer Kreislinie mit Mittelpunkt M, sodass der der Mittelpunkt innerhalb des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C liegt. Es sei γ der Winkel in diesem Dreieck beim Eckpunkt C. Betrachten wir ferner das Dreieck mit den Eckpunkten A, B, M sowie dessen Winkel ζ beim Eckpunkt M. Zeigen Sie

$$\zeta = 2 \cdot \gamma.$$

Schließen Sie daraus, dass die Größe des Winkels γ bereits durch Verhältnis der Länge der Strecke von A nach B zum Kreisdurchmesser bestimmt ist, also unabhängig von C ist.
Hinweis: Verbinden Sie M mit C, damit das große Dreieck in 3 kleinere aufgeteilt wird. Vergleichen Sie die entstehenden Winkel und verwenden Sie, dass in einem gleichschenkeligen Dreieck auch die entsprechenden Winkel gleich groß sind.

Lösung:
Der Winkel γ heißt in diesem Zusammenhang auch *Peripheriewinkel*, und dew Winkel ζ heißt *Zentriwinkel*.

Anmerkung: Der Zentriwinkel ist natürlich auch dann das doppelte des Peripheriewinkels, wenn der Mittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegt, aber ist dann größer als ein gestreckter, was hier der Einfachheit halber vermieden werden sollte.

Eine Skizze ist unerläßlich.

Sei $\alpha = \measuredangle MAC = \measuredangle ACM$ (weil gleichschenkeliges Dreieck) und $\beta = \measuredangle MBC = \measuredangle BCM$. Dann ist $\gamma = \alpha + \beta$ und $\measuredangle AMC = \pi - 2\alpha$, $\measuredangle BMC = \pi - 2\beta$, sodass

$$\zeta + (\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) = 2\pi,$$

also $\zeta = 2\alpha + 2\beta = 2\gamma$.

Da der Zentriwinkel offenbar durch die Sehne bestimmt ist, muss das auch für die Hälfte davon, den Peripheriewinkel, gelten.

Weitere Anmerkung: Das Verhältnis der Länge der Sehne zum Durchmesser ist der Sinus des Peripheriewinkels, wie ebenfalls durch einfache Überlegungen zu erkennen ist.

□