Algebra für Informatik (2016S)

3. Übungsblatt, mit Lösungen

für den 11. April 2016

1. In der Ebene sei die Gerade g durch ihre hessesche Normalform gegeben, d.h., gegeben sind eine Zahl $d \geq 0$ und ein Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ der Länge 1, sodass die Gerade durch

$$g : n_1 x + n_2 y = d$$

definiert ist. Welche geometrische Bedeutung haben d und $\vec{n}$? Leiten Sie eine Formel her, die zu jedem Punkt P dessen Abstand von g angibt.

Lösung:
d ist der Abstand der Gerade vom Nullpunkt
$\vec{n}$ ist der normierte Normalvektor von g welcher vom Nullpunkt in Richtung g zeigt
Abstand von P zu g beträgt $|\langle P\,,\, \vec{n}\rangle - d|$ $\square$

2. Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(a) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

(b) $|\,\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|\,| \leq \|\vec{a} + \vec{b}\|$

Unter welcher Bedingung gilt jeweils Gleichheit?

Lösung:
Gleichheit falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche Richtung haben, in (a) mit gleicher Orientierung und in (b) mit entgegengesetzter Orientierung, oder falls mindestens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist. $\square$

3. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds durch $|\langle \vec{a} \times \vec{b}\,,\, \vec{c}\rangle|$ gegeben ist.
Hinweis: Ein Parallelepiped ist das dreidimensionale Analogon zum Parallelogramm. Es handelt sich also um ein schiefes Prisma mit Parallelogrammen als Grund- und Seitenflächen, wobei gegenüberliegende Seitenflächen parallel und deckungsgleich zueinander sind.

Lösung:
Volumen eines Prismas = Grundfläche mal Höhe. Nach Satz 1.15(3) ist die Grundfläche gegeben durch $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$. Nach Satz 1.10 ist $\vec{h} := \frac{\langle \vec{c}\,,\, \vec{a} \times \vec{b}\rangle}{\langle \vec{a} \times \vec{b}\,,\, \vec{a} \times \vec{b}\rangle} \vec{a} \times \vec{b}$ die Höhe. Insgesamt: $V = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{h}\| = |\langle \vec{a} \times \vec{b}\,,\, \vec{c}\rangle|$ $\square$

4. Im Raum seien die folgenden vier Punkte gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h in den folgenden Fällen:

(a) g enthält A und D, h enthält B und C

(b) g enthält A und B, h enthält C und D

(c) g enthält A und C, h enthält B und D

Welche geometrische Figur bilden diese vier Punkte?

Lösung:

(a) Schnittpunkt: $(-1, 4, 9)$

(b) g und h sind parallel

(c) Schnittpunkt: $(1, 2, 3)$

Somit bilden die Punkte A, B, C, D ein Trapez. □

5. Bestimmen Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine implizite Darstellung der Ebene, die die Punkte A, B, C der vorigen Aufgabe enthält. Überprüfen Sie, ob der Punkt D ebenfalls in dieser Ebene liegt.

Lösung:
Z.B. $e : X = A + \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC} = (3, -2, -1) + \lambda(-2, 6, 2) + \mu(-3, 6, 6)$
$e : \langle X - A\,,\ \vec{AB} \times \vec{AC}\rangle = 0$ ergibt $e : 24x + 6y + 6z = 54$
Durch Kürzen erhält man $e : (3, -2, -1) + \lambda(-1, 3, 1) + \mu(-1, 2, 2)$ bzw. $e : 4x + y + z = 9$
Einsetzen der Koordinaten in die Ebenengleichung ergibt $4 \cdot 1 + 1 + 4 = 9$. Der Punkt D liegt also in der Ebene, wie auch bereits durch die Ergebnisse der vorigen Aufgabe vorab klar ist. □

6. Bestimmen Sie den Abstand der folgenden beiden Geraden im Raum:

$$g : X = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Der Abstand zweier Geraden wird entlang einer Verbindungslinie gemessen, die normal auf beide Geraden steht.

Lösung:
Wir bestimmen zunächst einen Vektor $\vec{n}$, der normal auf g und h ist: $\vec{n} = (4, 1, 1) \times (4, 5, -3) = (-8, 16, 16)$. Diesen benutzen wir um zusammen mit g eine Ebene aufzuspannen, die wir mit h schneiden. Den Schnittpunkt $(1, 2, 3)$ erhält man aus $(10, 2, 3) + \lambda(4, 1, 1) + \nu\vec{n} = (5, 7, 0) + \mu(4, 5, -3)$ mit $\lambda = -2$ und $\nu = \frac{1}{8}$ bzw. $\mu = -1$. Da $\vec{n}$ normal auf g und h ist, ist die Länge von $\nu\vec{n}$ auch gleichzeitig der Abstand von g und h. Die Verbindungslinie

verläuft von $(1,2,3)$ auf h zu $(1,2,3) - \frac{1}{8}\vec{n} = (2,0,1)$ auf g.
$\|\frac{1}{8}\vec{n}\| = \|(-1,2,2)\| = 3$

Alternativ erhält man den Vektor für die kürzeste Verbindung zwischen den Geraden auch direkt als die Projektion irgendeiner Verbindung der Geraden (z.B. $\begin{pmatrix}10\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\3\end{pmatrix}$) auf $\vec{n}$. Also

$$\frac{\langle \begin{pmatrix}5\\-5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \rangle}{\| \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{-9}{9} \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}.$$

□

7. Ein Planet bewegt sich kreisförmig um einen Stern, wobei ein Umlauf 10 Jahre dauert. Der Planet befindet sich zu drei verschiedenen Zeitpunkten an folgenden Orten:

$$A = \begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Position des Sterns. Berechnen Sie weiters die Geschwindigkeit des Planeten in km/h. Eine Koordinateneinheit entspreche dabei einer Astronomischen Einheit: 1 AE = 149 597 870, 7 km.

Lösung:
Wir bestimmen zunächst die Ebene der Punkte, die sich von A und B gleich weit entfernt befinden. D.h. $e_1 : \langle \vec{AB}, X\rangle = \langle \vec{AB}, \frac{A+B}{2}\rangle$ bzw. explizit $e_1 : -3x - 3y = -6$. Ebenso erhalten wir für B und C die Ebene $e_2 : -x - 2y + z = 2$. Die Schnittgerade von e_1 und e_2 zeigt in Richtung $\vec{AB} \times \vec{BC} = (-3,3,3)$. Um einen Punkt auf dieser Geraden zu bestimmen wählen wir $x = 0$, dann erhält man aus der Gleichung von e_1 dass $y = 2$ und aus jener von e_2 somit $z = 6$. Der Stern befindet sich im Schnittpunkt dieser Geraden $(0,2,6) + \lambda(-3,3,3)$ mit der von A, B, C aufgespannten Ebene $e : \langle \vec{AB} \times \vec{BC}, X\rangle = \langle \vec{AB} \times \vec{BC}, A\rangle$ bzw. explizit $e : -3x + 3y + 3z = 6$. Mit $\lambda = \frac{2}{3}$ erhält man den Schnittpunkt $S = (2,0,4)$. Damit beträgt der Bahnradius $r = \|\vec{AS}\| = \sqrt{42}$. In 10 Jahren legt der Planet also $2\pi r = 2\pi\sqrt{42} \approx 40{,}7197$ AE zurück. Das entspricht $\frac{2\pi\sqrt{42}}{10\cdot 365\cdot 24} \cdot 149\,597\,870{,}7 \approx 69\,538{,}58$ km/h. □

8. Es sei t eine reelle Zahl, und A und B seien $m\times n$-Matrizen. Beweisen Sie

$$t \cdot (A + B) = t \cdot A + t \cdot B.$$