Algebra für Informatik (2016S)

4. Übungsblatt, mit Lösungen

für den 18. April 2016

1. Beweisen Sie Satz 2.9: Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, und seien $A, B \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Dann gilt

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C).$$

   Hinweis: Berechnen Sie von beiden Matrizen den (i, j)-ten Eintrag.

2. Finden Sie eine Matrix X, sodass $A \cdot X = B$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Jede Spalte von X entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems.

   Lösung:
   Per the instructions, solve individually

$$A \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad A \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix},$$

   to get

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ \frac{11}{2} & \frac{33}{8} \end{pmatrix}.$$

   $\square$

3. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $A, B, E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei E_n die Einheitsmatrix vom Format $n \times n$ ist. Bestimmen Sie, welche von den folgenden Gleichungen im Allgemeinen gültig sind. Verbessern Sie diejenigen Gleichungen, die nicht allgemein gelten, indem Sie die rechte Seite der Gleichung verändern. Anmerkung: Für eine $n \times n$-Matrix X und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$X^k := \underbrace{X \cdots X}_{k-\text{faches Produkt}}.$$

   (a)

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2$$

(b)

$$(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$$

(c)

$$(A+E_n)^2=A^2+2A+E_n$$

(d)

$$(A+B)^2=A^2+B^2+2A\cdot B$$

(e)

$$(AB+BA)^T-(AB)^T=A^T\cdot B^T$$

Lösung:

(a) Not true in general. One way to make it true is to add $A\cdot B+B\cdot A$ to the r.h.s.

(b) Not true in general. One way to make it true is to add $A\cdot B-B\cdot A$ to the r.h.s.

(c) True in general.

(d) Not true in general. One way to make it true is to subtract $A\cdot B$ and add $B\cdot A$ on the r.h.s.

(e) True in general.

□

4. Gegeben sei die Matrix

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 8 & -2 & 1\\ 1 & -7 & 6\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie: A^2, A^T, $(A^T)^T$, $A\cdot A^T$, $A^T\cdot A$.

Lösung:

$$A^2=\begin{pmatrix}25 & 1 & 9\\ 64 & 4 & 1\\ 1 & 49 & 36\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}5 & 8 & 1\\ 1 & -2 & -7\\ -3 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T=A$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 35 & 35 & -20 \\ 35 & 69 & 28 \\ -20 & 28 & 86 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 90 & -18 & -1 \\ -18 & 54 & -47 \\ -1 & -47 & 46 \end{pmatrix}$$

□

5. Seien A, B Matrizen, sodass $A \cdot B$ definiert ist.
   (a) Wenn die dritte Spalte von B ein Nullvektor ist, wie kann man dann die dritte Spalte von $A \cdot B$ darstellen?
   (b) Wenn die dritte Spalte von B ein Vektor ist, der gleich der Summe der ersten beiden Spalten (von B) ist, wie kann man dann die dritte Spalte von $A \cdot B$ darstellen?

   Lösung:

   (a) As a zero vector.
   (b) As the sum of the first two columns of $A \cdot B$.

   □

6. Finden Sie zwei Matrizen A und B, sodass
   - weder A noch B eine Einheitsmatrix ist,
   - weder A noch B eine Nullmatrix ist,
   - $A \neq B$ und
   - $A \cdot B = B \cdot A$.

   Lösung:
   Any two square diagonal $n \times n$ matrices satisfy this condition. Of course, other answers are possible too. □

7. Nehmen Sie an, dass die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   die Eigenschaften $A \cdot B_1 = B_1 \cdot A$ und $A \cdot B_2 = B_2 \cdot A$ besitzt, wobei

   $$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Beweisen Sie, dass dann $A = \lambda E_2$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten muss. Welchen Wert muss λ haben?

   Lösung:
   Multiplying A by B_1 from the left and the right and equating the results shows that $c = b = 0$. The same procedure carried out with B_2 shows that $a = d$. This gives the result with $\lambda = a = d$. □

8. Beweisen Sie, dass Multiplikation mit der Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

die Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ um den Winkel θ rotiert. Wie kann man diese Drehung rückgänig machen? Hinweis: Die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus könnten hier nützlich sein.

Lösung:
We can write an arbitrarily chosen vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ in polar coordinates, i.e.

$$\mathbf{v} = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Multiplying by R gives

$$r \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha) \\ \sin(\theta)\cos(\alpha) + \cos(\theta)\sin(\alpha) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix},$$

where the equality follows by the angle sum formulae for cosine and sine. To reverse the transformation, we multiply by the matrix

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\square$