Algebra (Informatik)
6. Übungsblatt für den 2. Mai 2016

(1) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$?
  (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x + 2\,y = 0\}$.
  (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3\,x + 2\,y = 1\}$.

(2) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$?
  (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x,y) = (0,0) + \lambda \cdot (1,3)\}$.
  (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : (x,y) = (-4,-12) + \lambda \cdot (1,3)\}$.
  (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

(3) Zeigen Sie: Wenn ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ zwei Punkte enthält, so enthält er bereits die gesamte Verbindungsgerade.

(4) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ genau dann ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist, wenn $b = 0$.

(5) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccccc} 0x_1 & -1x_2 & +2x_3 & +7x_4 & +3x_5 & +5x_6 & = & 0 \\ 0x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +4x_4 & +6x_5 & +10x_6 & = & 0 \\ 0x_1 & -1x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +3x_5 & +5x_6 & = & 0 \end{array}$$

und geben Sie die Lösung parametrisiert an.

(6) Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme:
  (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 15 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -27 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 12 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & -12 & 14 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -7 \\ 35 \\ -12 \\ 28 \end{pmatrix},$$
  (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 15 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -27 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 12 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & -12 & 14 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -7 \\ 35 \\ -12 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

(7) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.
  (a) Jedes lineare Gleichungssystem der Form $A \cdot x = b$ mit zwei Gleichungen in drei Variablen hat zumindest eine Lösung.
  (b) Jedes lineare Gleichungssystem der Form $A \cdot x = 0$ mit zwei Gleichungen in drei Variablen hat zumindest eine Lösung.
  (c) Wenn man zwei Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ addiert, erhält man wieder eine Lösung des Gleichungssystems.
  (d) Wenn man zwei Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ addiert, erhält man wieder eine Lösung des Gleichungssystems.

(8) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.
  (a) Wenn x, y, z Lösungen eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ sind, so ist $x - y + z$ wieder Lösung des Systems.
  (b) Wenn A eine 2×2-Matrix und x eine Lösung von $A \cdot x = b$ ist, so ist x auch eine Lösung von $A^T \cdot x = b$.
  (c) Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: wenn $A \cdot B \cdot x = 0$, so gilt auch $B \cdot x = 0$.