Algebra für Informatik (2016S)

5. Übungsblatt, mit Lösungen

für den 25. April 2016

1. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq bc$ die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gilt.

2. Nehmen wir an, dass die $n \times n$-Matrizen A, B und $A + B$ invertierbar sind. Beweisen Sie, dass

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A.$$

Lösung:
Wir bemerken, dass

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}.$$

□

3. Gegeben seien zwei $n \times n$-Matrizen A und B, sodass $E_n - B \cdot A$ invertierbar ist. Beweisen Sie, dass $E_n - A \cdot B$ auch invertierbar ist und geben Sie eine Formel für $(E_n - AB)^{-1}$, ausgedrückt durch $A, B, (E_n - BA)^{-1}$ und E_n, an. Hinweis: Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.
Lösung:
Tun wir so, als ob die Summen-Formel für die geometrische Reihe auch für Matrizen gültig ist. Dann wäre

$$X := (E_n - B \cdot A)^{-1} = E_n + B \cdot A + (B \cdot A)^2 + (B \cdot A)^3 + \dots$$

und

$$E_n + A \cdot X \cdot B = E_n + A \cdot B + (A \cdot B)^2 + (A \cdot B)^3 + \dots = (E_n - A \cdot B)^{-1}.$$

Da diese Formel nur durch Heuristik hergeleitet ist, müssen wir natürlich noch überprüfen, dass

$$(E_n - A \cdot B) \cdot (E_n + A \cdot X \cdot B) = (E_n + A \cdot X \cdot B) \cdot (E_n - A \cdot B) = E_n$$

auch eigentlich gilt. □

4. Finden Sie invertierbare Matrizen von möglichst kleinem Format, sodass

$$(A \cdot B)^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}.$$

Lösung:
Man könnte auch sagen: Man suche zwei nicht vertauschbare invertierbare Matrizen. Irgendwie minimale Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

5. Mischt man die Sorte „Exklusiv“ zu 7,- EUR je kg mit der Sorte „Premium“ zu 3,- EUR je kg, so kostet die Mischung insgesamt 320,- EUR. Vertauscht man dagegen die Mengen der beiden Sorten, so kostet die Gesamtmischung 40,- EUR mehr. Wieviel kg nimmt man von jeder Sorte?

Lösung:
Wir nehmen x kg von der Sorte „Exklusiv“ und y kg von der Sorte „Premium“.

$$\begin{aligned} 7x + 3y &= 320 \\ 3x + 7y &= 320 + 40 \end{aligned}$$

Lösung: $x = 29$, $y = 39$.

Antwort: Wir nehmen 29 kg von der Sorte „Exklusiv“ und 39 kg von der Sorte „Premium“. □

6. Lösen Sie die Gleichungssysteme

(a) $\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) $x = 0$, $y = 0$

(b) $x = 2\pi - 1$, $y = -2$

(c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(d)

$$\left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(e)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 65 \\ -14 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -85 \\ 19 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

□

7. Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ -x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

□

8. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ **genau dann** eine Lösung (x, y) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ hat, **wenn** $ad - bc = 0$. Gibt es in diesem Fall eine Eindeutige Lösung?

Lösung:
($\Rightarrow$): gibt es eine nichtnull Lösung muss $ad - bc = 0$ sein.
($\Leftarrow$): wenn $ad - bc = 0$ ist, ist eine Gleichung ein Vielfaches der anderen (also gibt es auch keine Eindeutige Lösung). Eine andere Möglichkeit wäre ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu fixieren und y mithilfe einer der Gleichungen darzustellen, diese Lösung löst dann beide Gleichungen. In beiden Fällen muss jedenfalls beachtet werden, dass zumindest einer der Kokeffizienten ungleich 0 sein muss. (sind alle gleich 0 ist das Bsp. trivial)

□