Algebra für Informatik (2016S)

8. Übungsblatt

für den 23. Mai 2016

1. Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension folgender Unterräume.

   (a) $\{r\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-7\\9\end{pmatrix}\mid r,s,t\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

   (b) $\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid 3x+3y+2z=2\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

   (c) $\{\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid 5u-2v=0\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

   (d) $L(\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix})$.

   (e) $L(\begin{pmatrix}2.5\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix})$.

   (f) $L(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix})$.

2. Sei U der durch $a=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\0\end{pmatrix}$ und $b=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

   (a) Ist $B=(a,b)$ eine Basis von U?

   (b) Erweitern Sie B zu einer Basis C von $\mathbb{R}^4$.

3. Seien die Vektoren $a,b\in\mathbb{R}^n$ eine Basis des Unterraums U. Zeigen Sie direkt aus den Definitionen, dass auch $(a-\frac{1}{3}b,b)$ eine Basis von U ist.

4. Bestimmen Sie für jeden der Zeilenräume $Z(A)$, $Z(B)$, $Z(C)$, $Z(D)$ eine Basis. Können Sie entscheiden, welche dieser Zeilenräume gleich sind.

$$A=\begin{pmatrix}-1&-3&1&1&3\\-1&-3&2&-1&10\\1&3&0&2&-11\\2&6&1&0&-9\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-1&-2&0&-1&2\\1&2&0&1&-1\\-1&-2&-1&7&-1\\2&4&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0&0&-1&0&-1\\-1&-3&0&1&2\\1&3&1&-1&-1\\-1&-3&2&0&7\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&3&-1&0&-6\\0&0&0&-1&3\\0&0&2&2&-4\\2&6&-1&-1&-8\end{pmatrix}$$

5. Bestimmen Sie eine Basis des Nullraums von

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Bestimmen Sie für jede der Matrizen in Aufgabe 4 eine Basis des Nullraums. Welche davon sind gleich?

7. Bestimmen Sie alle Vektoren

   (a) im $\mathbb{R}^3$, die auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ normal stehen.

   (b) im $\mathbb{R}^4$, die auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal stehen.

8. Gegeben seien die Vektoren

   $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Für eine Teilmenge S eines Vektorraums, bezeichne $S^\perp$ die Menge aller Vektoren des Vektorraums, die auf jeden Vektor von S normal stehen.

   Berechnen Sie jeweils eine Basis und die Dimensionen von:

   (a) $\{x_1\}^\perp$,

   (b) $\{x_1, x_2\}^\perp$,

   (c) $\{x_1, x_2, x_3\}^\perp$,

   (d) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^\perp$.