Algebra für Informatik (2016S)

9. Übungsblatt, mit Lösungen

für den 30. Mai 2016

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von

$$3x + 3y + 2z = 2.$$

Lösung:
Die Gleichung ist, bis auf den Faktor 3, schon in Zeilenstaffelnormalform. Wir können die Lösung also direkt ablesen:

3	3	2	2
0	−3	0	0
0	0	−3	0

Die Lösung lässt sich somit darstellen als:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + S\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

oder als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3} + 3\alpha + 2\beta, \\ y &= -3\alpha, \\ z &= -3\beta. \end{aligned}$$

□

2. Es sei $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$ und $U = L(B)$.

(a) Welcher Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(w)_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Lösung:

$$w = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

□

(b) Welche Koordinaten hat $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ bezüglich B?

Lösung:

Wir lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 8 & 6 & 10 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}$$

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

□

(c) Versuchen Sie die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bezüglich B zu bestimmen.

Lösung:

Wir lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 8 & 6 & -2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}$$

Keine Lösung.

□

3. Gegeben seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 24 \\ -2 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix} \right)$$

(a) Zeigen Sie, dass B und C Basen desselben Unterraums von $\mathbb{R}^3$ sind.

Lösung:

Die Vektoren beider Basen sind offensichtlich linear unabhängig. Weiters gilt:

$$\begin{array}{rr|rr} 3 & 3 & 24 & 18 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 31 & 24 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \\ 0 & 3 & 15 & 12 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Also ist

$$B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = C.$$

Daraus folgt zunächst, dass der von B aufgespannte Unterraum den von C aufgespannten umfasst. Da beide die Dimension 2 haben, gilt Gleichheit. □

(b) Vom Vektor v kennen wir

$$(v)_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $(v)_B$.

Lösung:

Es gelten $v = C \cdot (v)_C$ und $v = B \cdot (v)_B$. Somit

$$(v)_B = B^{-1} \cdot C \cdot (v)_C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

□

4. (a) Bestimmen Sie alle Teiler von 252 und 120.

Lösung:

252: $1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 63, 84, 126, 252$

120: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$. □

(b) Bestimmen Sie alle gemeinsamen Teiler von 252 und 120.

Lösung:

$gT(252, 120)$: $1, 2, 3, 4, 6, 12$ □

(c) Finden Sie eine Zahl, deren Teiler genau die gemeinsamen Teiler von 252 und 120 sind.

Lösung:

12. □

(d) Bestimmen Sie alle Teiler von 0.

5. Bestimmen Sie mit der in Satz 6.5 beschriebenen Methode den größten gemeinsamen Teiler von

   (a) 167 und 115;
   Lösung:

$$
\begin{aligned}
167 &= 115 + 52 \\
115 &= 2 * 52 + 11 \\
52 &= 4 * 11 + 8 \\
11 &= 8 + 3 \\
8 &= 2 * 3 + 2 \\
3 &= 2 + 1
\end{aligned}
$$

□

   (b) 259 und 378.
   Lösung:

$$
\begin{aligned}
378 &= 259 + 119 \\
259 &= 2 * 119 + 21 \\
119 &= 5 * 21 + 14 \\
21 &= 14 + 7 \\
14 &= 2 * 7 + 0
\end{aligned}
$$

□

6. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie direkt aus den Definitionen:

   (a) $d \mid a$ und $d \mid b \implies d \mid a + b$ und $d \mid a - b$.
   Lösung:
   Es gelte $d \mid a$ und $d \mid b$.
   Gemäß Definition der Teilbarkeit gibt es $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{Z}$, sodass

$$
\begin{aligned}
a &= x \cdot d, \\
b &= y \cdot d.
\end{aligned}
$$

   Aus diesen Gleichungen folgen

$$
\begin{aligned}
a + b &= x \cdot d + y \cdot d = (x + y) \cdot d, \\
a - b &= x \cdot d - y \cdot d = (x - y) \cdot d.
\end{aligned}
$$

   Es gibt somit ein $z \in \mathbb{Z}$, sodass $d \mid a + b$ (man wähle $z := x + y$), und es gibt auch ein $z \in \mathbb{Z}$, sodass $d \mid a - b$ (man wähle $z := x - y$). □

   (b) $d \mid a \implies d \mid a \cdot c$.
   Lösung:
   Es gelte $d \mid a$. Gemäß Definition der Teilbarkeit gibt es $x \in \mathbb{Z}$, sodass

$$a = x \cdot d.$$

   Dann gilt aber auch

$$a \cdot c = (x \cdot d) \cdot c = (x \cdot c) \cdot d.$$

   Es gibt somit ein $z \in \mathbb{Z}$, sodass $d \mid a \cdot c$ (man wähle $z := x \cdot c$). □

7. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und (x, y) eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $ax + by = c$ Zeigen Sie, dass dann
$$\mathrm{ggT}(a, b) \mid c.$$

Lösung:
Sei $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.
Laut Definition des ggT gilt $d \mid a$ und $d \mid b$.
Daher $d \mid ax$ und $d \mid by$ (man verwende Aufgabe 6).
Daher $d \mid ax + by = c$ (wiederum mit Aufgabe 6).

Anmerkung: Genau genommen haben wir hier ein Problem, wenn $a = 0 = b$, es sei denn, wir definieren $\mathrm{ggT}(0, 0) = 0$. □

8. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, p_2, \ldots, p_n$ eine endliche Liste von Primzahlen.

   (a) Zeigen Sie, dass für kein p_i aus dieser Liste gilt:
$$p_i \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1.$$

   Lösung:
   Sei p_i eine Primzahl aus der Liste, für die $p_i \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ gilt. Mit Aufgabe 6 erhält man
$$p_i \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$$
   und, ebenfalls mit Aufgabe 6, gilt dann
$$p_i \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1) - p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n = 1,$$
   was aber nicht sein kann, weil eine Primzahl definitionsgemäß größer als 1 ist. □

   (b) Schließen Sie daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. (Sie dürfen dabei verwenden, dass jede Zahl > 1 durch eine Primzahl teilbar ist.)

   Lösung:
   $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$ ist größer als 1 und durch keine der Primzahlen p_i teilbar. Also muss sie durch eine nicht in dieser Liste enthaltene Primzahl teilbar sein. Da dies für jede endliche Liste von Primzahlen gilt, folgt daraus, dass es zu jeder endlichen Liste von Primzahlen eine darin nicht enthaltene Primzahl gibt. □