Algebra für Informatiker, 4. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden drei Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 10 \\ -x + 7y + 2z &= -10 \\ 5x - 8y + 5z &= -10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2z &= 3 \\ -2x + 3y - z &= 5 \\ 2y - 3z &= 2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_2 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_4 + 2x_5 &= 3. \end{aligned}$$

2. Sei E_1 die Ebene durch den Punkt $P_1 = (1, 2, -3)$, die senkrecht auf $N_1 = (0, 1, 0)$ steht. Sei E_2 die Ebene durch den Punkt $P_2 = (2, 3, 4)$, die parallel zu $R_1 = (1, 2, 1)$ und $R_2 = (1, -3, 1)$ ist. Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen E_1 und E_2.

3. (schriftliche Abgabe) Seien $(G_1, \circ_1)$ und $(G_2, \circ_2)$ zwei Gruppen mit neutralen Elementen $e_1 \in G_1$ bzw. $e_2 \in G_2$. Prüfen Sie nach, dass dann das kartesische Produkt

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1 \text{ und } g_2 \in G_2\}$$

mit der Verknüpfung

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ_1 h_1, g_2 \circ_2 h_2)$$

wieder eine Gruppe mit neutralem Element $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$ bildet.

4. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Seien $(H_1, \circ) \leq (G, \circ)$ und $(H_2, \circ) \leq (G, \circ)$ zwei Untergruppen von G. Prüfen Sie mit dem Untergruppenkriterium nach, dass dann der Durchschnitt

$$(H_1 \cap H_2, \circ) \leq (G, \circ)$$

wieder eine Untergruppe von G ist.

5. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Zeigen Sie, dass die folgenden Kürzungsregeln gelten. Für alle $a, b, c \in G$:

$$a \circ b = a \circ c \implies b = c, \qquad b \circ a = c \circ a \implies b = c.$$

6. Finden Sie ein Monoid, das keine Gruppe ist und in dem trotzdem beide Kürzungsregeln der vorherigen Aufgabe gelten.

7. (schriftliche Abgabe) Sei $M := \{1, 2, 3\}$ und $S(M)$ die symmetrische Gruppe.

   (a) Beschreiben Sie alle Untergruppen von $S(M)$.

   (b) Begründen Sie warum drei davon in gewissem Sinne "gleich" sind.

8. Sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $(A^*, *)$ das Wortmonoid über A mit dem leeren Wort ϵ, das heisst,

$$A^* = \{\epsilon, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{bb}, \mathtt{aaa}, \ldots\}$$

ist die Menge aller Worte in a und b mit der Konkatenation von Worten als Verknüpfung $*$.

   (a) Beschreiben Sie mindestens drei Unterhalbgruppen von A^*, die auch ein Monoid sind.

   (b) Geben Sie eine Unterhalbgruppe von A^* an, die kein Monoid ist.