Algebra für Informatiker, 9. Übungsblatt

1. (a) Zeigen Sie, dass $B = ((1,2,1),(2,9,0),(3,3,4))$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

   (b) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ derjenige Vektor, der bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ die Koordinaten $(1,-1,4)$ hat. Welche Koordinaten hat v bezüglich der Basis B?

2. Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist eine Funktion}\}$ der Vektorraum der reellen Funktionen mit den Operationen
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$
für $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $x \in \mathbb{R}$. Für $r \in \mathbb{R}$ sei $b_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$b_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = r, \\ 0 & \text{für } x \neq r. \end{cases}$$
Gilt

   (a) $B = \{b_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist linear unabhängig?

   (b) B ist eine Basis von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

3. Berechnen Sie die Dimension folgender Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

   (a) $U_1 = \{(a,b,c,0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

   (b) $U_2 = \{(a,b,a-b,a+b) \mid a,b, \in \mathbb{R}\}$

   (c) $U_3 = \{(a,a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

4. Sei $v_1 = (1,-4,2,-3)$ und $v_2 = (-3,8,-4,6)$. Erweitern Sie $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

5. (schriftliche Abgabe) Sei $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis eines Vektorraums V über dem Körper K und
$$c = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$$
mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$, sodass $\lambda_1 \neq 0$ ist.

   Zeigen Sie, dass $\{c, b_2, b_3\}$ ebenfalls eine Basis von V ist.

6. Sei V ein Vektorraum, U_1, U_2 Unterräume von V und $S \subseteq U_1$, $T \subseteq U_2$ linear unabhängige Mengen. Zeigen Sie:

   Falls $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt, dann ist auch $S \cup T$ linear unabhängig.

7. (schriftliche Abgabe) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Vektorraums K_m^n aller $m \times n$ Matrizen über dem Körper K.

8. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $(K_n^n, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Einselement.

   (b) K_n^n ist genau dann kommutativ, wenn $n = 1$ ist.