Algebra für Informatiker, 10. Übungsblatt

1. Berechnen Sie, wenn möglich, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$, $B \cdot A$, $C \cdot A$ und $C \cdot B$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Geben Sie Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ an, für die gilt: $A^2 = 0$, $B^2 \neq 0$ und $B^3 = 0$.

3. Eine Matrix, die in jeder Zeile und Spalte jeweils genau eine Eins besitzt und sonst nur Nullen, nennt man eine *Permutationsmatrix.* Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot X$ und $B \cdot X$ für $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t$ (welchen Permutationen entsprechen A und B demnach?). Berechnen Sie nun $A \cdot B$ und $B \cdot A$, sowie A^{-1}.

4. (schriftliche Abgabe) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $b_1 = (1, 0, 2)$, $b_2 = (-1, 2, 1)$, $b_3 = (0, 2, 2)$.

5. Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Polynome $b_n(x)$ wie folgt definiert:

$$b_0(x) = 1, \qquad b_n(x) = x^{\underline{n}} = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1} (x-i).$$

Die Polynome $b_n(x)$ bilden eine Basis von $P(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die Koordinaten der Monome x^2, x^3 und x^4 bezüglich dieser Basis.

6. Weisen Sie nach, dass $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ für $A \in K_m^n$ und $B \in K_n^p$ gilt.

7. (schriftliche Abgabe) Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

indem Sie die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite invertieren.

8. Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems; geben Sie die Lösungsmenge als lineare Mannigfaltigkeit an.

$$\begin{aligned} a - b + 2c \phantom{{}-3d} + e &= 3 \\ a \phantom{{}-b} + 4c &= 3 \\ 2a - b + 6c - 3d + 4e &= 0 \\ a \phantom{{}-b} + 4c + d - e &= 5 \end{aligned}$$