Algebra für Informatiker, 11. Übungsblatt

1. Berechnen Sie A^{-1} (falls es existiert) mit linearen Gleichungssystemen wie in 11.7 im Skriptum für

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. (schriftliche Abgabe) Berechnen Sie A^{-1} für

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;

3. Finden Sie alle reellen Zahlen a, sodass die Matrix $\begin{pmatrix} 3-a & 2 \\ 2 & 6-a \end{pmatrix}$ nicht invertierbar ist.

4. (schriftliche Abgabe) Finden Sie den Nullraum der Matrix A für

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Finden Sie alle Lösungen der Systeme wie in 11.11 im Skriptum

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Beweisen Sie, dass das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ die Form $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ hat.

7. Finden Sie reelle Zahlen a, b, und c, sodass die Dimension der Lösungsmenge des Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & a \\ 2 & 5 & 8 & b \\ 3 & 6 & 9 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   eins ist.

8. Eine Matrix, die in jeder Zeile und Spalte jeweils genau eine Eins besitzt und sonst nur Nullen, nennt man eine Permutationsmatrix (genauso wie in №3 im Übungsblatt 10). Beweisen Sie, dass jede Permutationsmatrix invertierbar ist.