Distributionen und Lokalkonvexe Räume

Richard Lechner
Stefan Kindslehner
Alexander Niederklapfer

Institut für Analysis
Johannes Kepler Universität Linz
Altenbergerstrasse 69
A-4040 Linz

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Der Satz von Hahn-Banach – Version der linearen Algebra

Definition 1.1. Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt *sublinear* falls
(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad \lambda \geq 0,\ x \in X,$
(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad x, y \in X$

Satz 1.2. *Sei X ein Vektorraum, und sei U ein Unterverktorraum von X. Weiters seien $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $\ell : U \to \mathbb{R}$ linear sodaß*

$$\ell(u) \leq p(u), \qquad u \in U.$$

Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{R}$, $L|U = \ell$ mit

$$L(x) \leq p(x), \qquad x \in X.$$

Beweis vom Satz von Hahn-Banach. *Schritt 1*
Wir betrachten zunächst den Fall, dass U *Kodimension 1 in* X hat, also

$$\dim X/_U = 1 \quad \text{mit} \quad L|_U = l \quad \text{und} \quad L(x) \leq p(x) \quad (\forall x \in X), \tag{1.1}$$

wobei $X/_U = \{x + U \ : \ x \in X\}$.

Sei also $x_0 \in X/_U$. Damit gilt $x = u + \lambda x_0 \quad (\forall x \in X \exists! u \in U, \lambda \in \mathbb{R})$, x ist also eindeutig in dieser Form darstellbar. Wir definieren

$$\forall r \in \mathbb{R} : \ L_r(x) := l(u) + \lambda r.$$

Mit dem Vorhergegangenen folgt aus $x \in U$ sofort $\lambda = 0$. L_r ist für jedes r linear und stimmt mit l auf U überein.
Wir wollen zeigen, dass:

$$L_r(x) \leq p(x) \quad (\forall x \in X). \tag{1.2}$$

Wegen $x = u + \lambda x_0$ ist das äquivalent zu

$$l(u) + \lambda r \leq p(u + \lambda x_0) \quad (\forall u \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

Für den Fall $\lambda = 0$ ist nichts zu zeigen.
Sei $\lambda > 0$. Dann ist die obige Aussage äquivalent zu

$$\lambda r \leq p(u + \lambda x_0) - l(u) \quad (\forall u \in U)$$
$$\Leftrightarrow \quad r \leq p(\frac{u}{\lambda} + x_0) - l(\frac{u}{\lambda}) \quad (\forall u \in U).$$

In der letzten Zeile wurde Linearität bzw. Subliniearität mit $\lambda > 0$ ausgenutzt. Mit der Setzung $v := \frac{u}{\lambda}$ und unter Ausnutzung des Allquantors folgt:

$$\Leftrightarrow \quad r \leq \inf_{v \in U} p(v + x_0) - l(v).$$

Für $\lambda < 0$ gilt hingegen

$$\lambda r \leq p(u + \lambda x_0) - l(u) \quad (\forall u \in U)$$

$$\Leftrightarrow \quad -r \leq p(\frac{u}{-\lambda} - x_0) - l(\frac{u}{-\lambda}) \quad (\forall u \in U)$$
$$\Leftrightarrow \quad r \geq \sup_{w \in U} l(w) - p(w - x_0) \quad (w := \frac{u}{-\lambda}).$$

Also ist obige Aussage äquivalent zu

$$\exists r \in \mathbb{R}: \quad \sup_{w \in U} l(u) - p(u - x_0) \leq r \leq \inf_{v \in U} p(u + x_0) - l(u)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sup_{w \in U} l(u) - p(u - x_0) \leq \inf_{v \in U} p(u + x_0) - l(u)$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall v, w \in U: \quad l(u) - p(u - x_0) \leq p(u + x_0) - l(u)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall v, w \in U: \quad l(w) + l(u) \leq p(v + x_0) + p(w - x_0). \tag{1.3}$$

Da $v + w \in U$, ist $l(v+w) \leq p(v+w) = p(v+x_0+w-x_0) \leq p(v+x_0)+p(w-x_0)$, was die zu zeigende Aussage impliziert. Somit haben wir für den Fall, dass U Kodimension 1 in X hat, den Satz von Hahn-Banach bewiesen.

Schritt 2

Um den Satz von Hahn-Banach für allgemeinere U zu zeigen, benötigen wir das zum Auswahlaxiom äquivalente(!)

Lemma von Zorn. Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete nichtleere Menge, in der *jede Kette* (= eine *total geordnete Teilmenge* von A) eine *obere Schranke* besitzt. Dann liegt jedes Element von A unter einem *maximalen Element* m von A, sodass:

$$m \leq a \quad \Rightarrow \quad m = a \quad (\forall a \in A)$$

Wir definieren

$$A := \left\{ (V, L_V) : \begin{array}{c} \text{V ist Unterraum von } X \text{ und } U \subset V \\ L_v : V \to \mathbb{R} \text{ linear} \\ L_V \leq p|_V \text{ und } L_V|_U = l \quad (\forall x \in V) \end{array} \right\},$$

und die Ordnung „$\leq$“ durch

$$(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2}) \;:\Leftrightarrow\; V_1 \subset V_2 \text{ und } L_{V_2}|_{V_1} = L_{V_1}.$$

Diese Ordnung ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch und damit partiell, allerdings nicht total, da es nicht miteinander vergleichbare Elemente gibt. Um das Lemma von Zorn anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass jede Kette bezüglich dieser Ordnung eine *obere Schranke* besitzt.

Sei $\{(V_i, L_{V_i})\}_{i \in I} \subset A$ total geordnet. Wir zeigen:

$$(V, L_V), \text{wobei } V := \bigcup_{i \in I} V_i \quad \text{und} \quad L_V(x) := L_{V_i}(x) \; (\forall x \in V_i).$$

ist eine obere Schranke für diese Kette.

L_V ist wegen der Totalität von „$\leq$“ wohldefiniert, es gilt klarerweise

$$\forall i \in I: \quad (V_i, L_{V_i}) \leq (V, L_V).$$

Somit sind alle Voraussetzungen vom Lemma vom Zorn erfüllt. ($A \neq \emptyset$ weil $(U, l) \in A$).

$\Rightarrow \quad \exists m = (X_0, L_{X_0}) \in A$, das maximal ist:

$$\text{d.h. } \forall (V, L_V) \in A : (V, L_V) \geq (X_0, L_{X_0}) \quad \Rightarrow (V, L_V) = (X_0, L_{X_0}).$$

Angenommen, $X_0 \neq X$. Dann gibt es W sodass

$$X_0 \subsetneq W \subset X \text{ und } X_0 \text{ hat Kodimension 1 in } W.$$

Damit ist aber *Schritt 1* anwendbar und wir bekommen ein Paar $(W, L_W) \in A$, das eine echte Majorante von (X_0, L_{X_0}) ist. *Widerspruch*.
Somit $X_0 = X$ und somit ist

$$L := L_{X_0}$$

die gesuchte Erweiterung von l auf ganz X.

□

1. Der Satz von Hahn-Banach – Fortsetzungsversion

BEHAUPTUNG 1.3. Sei Y ein normierter Vektorraum, dann ist

$$Y^* = \{y^* : Y \to \mathbb{R} \ / \ y^* \text{ ist linear und stetig}\}$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|y^*\|_{Y^*} = \sup_{\|y\|_Y \leq 1} |y^*(y)|$$

ein Banachraum, das heißt ein vollständiger normierter Vektorraum.

SATZ 1.4. *Sei X ein Vektorraum, und sei U ein Untervektorraum von X. Zu jedem linearen stetigen Funktional $u^* : U \to \mathbb{R}$ existiert ein lineares stetiges Funktional $x^* : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$x^*|_U = u^* \qquad \textit{und} \qquad \|x^*\|_{X^*} = \|u^*\|_{U^*}.$$

BEWEIS. Wir definieren

$$p(x) := \|u^*\|_{U^*} \|x\|_X \quad (\forall x \in X).$$

Außerdem gilt unter Ausnützung der Submultiplikativität

$$u^*(x) \leq |u^*(x)| \leq \|u^*\| \|x\| = \sup_{\|x\|=1} |u^*(x)| \|x\|.$$

Damit ist p sublinear und die Vorraussetzungen für den Satz von *Hahn-Banach* sind erfüllt:

$$\Rightarrow \quad \exists x^* : X \to \mathbb{R} \text{ linear mit } x^*|_U = U^* \text{ und } x^*(x) \leq p(x) \quad (\forall x \in X)$$

Damit folgt

$$-x^*(x) = x^*(-x) \leq p(-x).$$

Aufgrund der speziellen Wahl von p ist aber $p(-x) = p(x)$ und damit

$$|x^*(x)| \leq p(x) = \|u^*\|_{U^*} \|x\|_X \quad (\forall x \in X).$$

Mit der Definition von $\|x^*\|$ ist das unter Ausnutzung des Allquantors äquivalent zu

$$\|x^*\| \leq \|u^*\|_{U^*}.$$

Aufgrund von $x^*|_U = u^*$ folgt die umgekehrte Ungleichung.

$$\|x^*\|_{X^*} \geq \|u^*\|_{U^*}$$

und damit

$$\|x^*\|_{X^*} = \|u^*\|_{U^*}.$$

□

KOROLLAR 1.5. *In jedem normiertern Vektorraum X existiert zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$ ein $x^* \in X^*$ sodaß*

$$\|x^*\|_{X^*} = 1 \qquad \textit{und} \qquad x^*(x) = \|x\|_X.$$

Beweis. Wir definieren uns ein lineares Funktional u^* von der linearen Hülle von einem beliebigen, aber fixen $x \in X,\ x \neq 0$ nach $\mathbb{R}$ durch

$$\lambda x \to \lambda \|x\|.$$

Da die lineare Hülle von x $(=: U)$ offensichtlich endlich dimensional ist, ist u^* stetig. u^* hat auf dem Unterraum genau die gewünschten Eigenschaften. Wir verwenden jetzt den Satz von *Hahn-Banach* (Fortsetzungsversion), um u^* von dem eindimensionalen Unterraum U auf den gesamten Raum normerhaltend zu erweitern:

$$\Rightarrow \quad \exists x^* \ : \quad X \to \mathbb{R} \quad \text{linear, stetig mit:}$$
$$x^*|_U = u^* \quad \text{und} \quad \|x^*\| = \|u^*\|.$$

Damit gilt:

$$\lambda x^*(x) = x^*(\lambda x) = u^*(\lambda x) = \lambda \|x\|$$

Für $\lambda = 1$ folgt

$$x^*(x) = \|x\|.$$

$$\|x^*\| = \|u^*\| = \sup_{y \in B_U} |u^*(y)| = \sup_{\lambda x \in B_U} |u^*(\lambda x)| =$$
$$= \sup_{|\lambda|\|x\| \leq 1} |u^*(\lambda x)| = \sup_{|\lambda|\|x\| \leq 1} |\lambda|\|x\| = 1.$$

□

Korollar 1.6. *In jedem normiertern Vektorraum X gilt*

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |x^*(x)|.$$

Beweis. Für $x = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $x \neq 0$. Aus dem vorigen Korollar folgt:

$$\exists x^* \in X^* \ : \quad \|x^*\| = 1 \quad \text{und} \quad x^*(x) = \|x\|.$$

Also ist

$$\|x\| \leq \sup_{x^* \in X^*,\ \|x^*\|_{X^*} = 1} |x^*(x)| \leq \sup_{x^* \in X^*,\ \|x^*\|_{X^*} = 1} \|x^*\|\|x\| = \|x\|,$$

und damit gilt

$$\|x\| = \sup_{x^* \in X^*,\ \|x^*\|_{X^*} = 1} |x^*(x)|.$$

□

2. Topologische Grundlagen

Definition 1.7. Eine *Topologie* $\mathfrak{T}$ auf einer Menge T ist ein System von Teilmengen von T mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\emptyset \in \mathfrak{T}$, $T \in \mathfrak{T}$,
(b) ist $U, V \in \mathfrak{T}$, dann auch $U \cap V \in \mathfrak{T}$
(c) Sei I eine beliebige Indexmenge und $O_i \in \mathfrak{T}$, $i \in I$, dann ist $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathfrak{T}$.

Das Paar $(T, \mathfrak{T})$ heißt topologischer Raum, und jede Menge $O \in \mathfrak{T}$ heißt offen. Eine Menge $A \subset T$ heißt abgeschlossen genau dann wenn $T \setminus A$ offen ist.

Aus der obigen Definition folgt unmittelbar

Behauptung 1.8.

(a) $\emptyset$ und T sind abgeschlossen,
(b) die Vereinigung zweier abgeschlossener Menge ist abgeschlossen,
(c) der Durschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

DEFINITION 1.9. Eine Menge U heißt *Umgebung* von einem Punkt $t \in T$, falls eine offene Menge O existiert sodaß

$$t \in O \subset U.$$

Ein System von Mengen $\mathfrak{U}$ heißt *Umgebungsbasis* des Punktes $t \in T$, falls für jede Umgebung V von t ein $U \in \mathfrak{U}$ existiert sodaß

$$t \in U \subset V.$$

DEFINITION 1.10. Eine Menge I mit der Ordnungsrelation $\leq$ heißt gerichtete Menge, falls

(a) $i \leq i$, für alle $i \in I$,
(b) $i \leq j$ und $j \leq k$ impliziert $i \leq k$,
(c) für alle $i_1, i_2 \in I$ existiert ein $j \in I$ sodaß $i_1 \leq j$ und $i_2 \leq j$.

DEFINITION 1.11. Ein *Netz* in einer Menge T ist eine Abbildung von einer gerichteten Menge I nach T. Wir schreiben dafür $(t_i)_{i\in I}$ oder (t_i).
Ein Netz $(t_i)_{i\in I}$ in T *konvergiert* gegen $t \in T$ falls für jede Umgebung U von t ein Index $j \in I$ existiert sodaß für alle Indizes $i \geq j$

$$t_i \in U.$$

Wir schreiben dafür $t_i \to t$.

DEFINITION 1.12. Seien $(T_1, \mathfrak{T}_1)$ und $(T_2, \mathfrak{T}_2)$ topologische Räume, und sei $f : T_1 \longrightarrow T_2$. Die Abbildung f heißt stetig in t_0, falls für jede Umgebung V von $f(t_0)$ gilt daß $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t_0 ist.

SATZ 1.13. *Seien $(T_1, \mathfrak{T}_1)$ und $(T_2, \mathfrak{T}_2)$ topologische Räume, und sei $f : T_1 \longrightarrow T_2$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist überall (in jedem Punkt) stetig,
(ii) für alle $O \in \mathfrak{T}_2$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathfrak{T}_2$,
(iii) für alle abgeschlossenen $A \subset T_2$ gilt $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in T_1.

SATZ 1.14. *Sei $f : T_1 \longrightarrow T_2$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist stetig in $t_0 \in T_1$,
(ii) für jedes Netz (t_i) für welches $t_i \to t_0$, folgt $f(t_i) \to f(t_0)$.

DEFINITION 1.15. Seien $(T_1, \mathfrak{T}_1)$ und $(T_2, \mathfrak{T}_2)$ topologische Räume, so ist die Produkttopologie auf $T_1 \times T_2$ gegeben durch:

(a) $O \subset X \times Y$ heißt offen genau dann wenn für jedes $x \in O$ ein $U_1 \in \mathfrak{T}_1$ und ein $U_2 \in \mathfrak{T}_2$ existieren sodaß

$$x \in U_1 \times U_2 \subset O.$$

(b) Die Produkttopologie auf $T_1 \times T_2$ ist die Kollektion aller offener Mengen auf $T_1 \times T_2$.

Die Produkttopologie ist damit die gröbste („kleinste“) Topologie auf $X \times Y$, so dass alle $U \times V$, $(U \in \mathfrak{T}_1,\ V \in \mathfrak{T}_2)$ offen sind.

DEFINITION 1.16. Sei T ein topologischer Raum. Dann heißt $K \subset T$ kompakt genau dann wenn für jedes System von offenen Mengen $\{O_i\}_{i\in I}$ für das $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ gilt es existieren endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_n$ sodaß $K \subset \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$.

SATZ 1.17. *Sei T ein topologischer Raum dann ist $K \subset T$ kompakt genau dann wenn jedes Netz $(t_i)_{i\in I}$ in K ein konvergentes Teilnetz besitzt.*

DEFINITION 1.18. Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sein T_i ein topologischer Raum. Dann ist

$$\prod_{i \in I} T_i = \big\{ f \,:\, I \to \bigcup_{i \in I} T_i \,/\, f(i) \in T_i \text{ für alle } i \in I \big\}.$$

Eine Menge $O \subset \prod_{i \in I} T_i$ heißt offen in der Produkttopologie wenn für alle $t \in O$ Mengen $O_{i_1} \ldots, O_{i_n}$ existieren für die O_{i_k} offen in T_{i_k} ist, $1 \leq k \leq n$, sodaß

$$t \in \big\{ s \in \prod_{i \in I} T_i \,:\, s(i_k) \in O_{i_k} \text{ für alle } 1 \leq k \leq n \big\} \subset O.$$

SATZ 1.19 (Satz von Tikhonov). *Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei jedes T_i ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $\prod_{i \in I} T_i$ kompakt in der Produkttopologie.*

KAPITEL 2

Lokalkonvexe Räume

1. Zusätzliche Notation

Definition 2.1. Ein Vektorraum X ausgestattet mit einer Topologie $\mathcal{T}$ heißt *topologischer Vektorraum* falls $+ : X \times X \to X$ und $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ stetige Abbildungen bezüglich ihrer jeweiligen Produkttopologie sind.

Definition 2.2. Sei X ein Vektorraum, und $A \subset X$, dann definieren wir das Minkowskifunktional $p_A : X \longrightarrow [0, \infty]$ durch

$$p_A(x) = \inf \big\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in A\big\}, \qquad \text{für jedes } x \in X.$$

Eine Teilmenge A eines Vektorraumes X heißt

- absorbierend, falls $p_A(x) < \infty$ für alle $x \in X$,
- kreisförmig, falls $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\} \cdot A \subset A$.
- absolutkonvex, falls A konvex und kreisförmig ist.

Definition 2.3. Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to [0, \infty)$ heißt Halbnorm genau dann wenn

(a) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$,
(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, für alle $x, y \in X$.

Beispiel. Für $x : [0, 1] \to \mathbb{C}$ und $t \in [0, 1]$ definieren wir die Halbnormen p_t durch

$$p_t(x) = |x(t)|.$$

Eine Folge $(x_n)_n$ konvergiert punktweise gegen 0 genau dann wenn für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$\lim_n p_t(x_n) = 0.$$

2. Definition lokalkonvexer Räume

Sei X ein Vektorraum und P eine Menge von Halbnormen auf X. Dann definieren wir für jede endliche Menge $F \subset P$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Mengen

$$U_{F,\varepsilon} = \big\{x \in X : p(x) \leq \varepsilon \text{ für alle } p \in F\big\},$$
$$\mathcal{U} = \big\{U_{F,\varepsilon} : F \subset P \text{ endlich}, \varepsilon > 0\big\}.$$

Behauptung 2.4. Die Kollektion $\mathcal{U}$ besitzt folgende Eigenschaften

(1) Für alle $U \in \mathcal{U}$ ist $0 \in U$,
(2) Für alle $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ für das $U \subset U_1 \cap U_2$, denn es gilt ja $U_{F_1 \cup F_2, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \subset U_{F_1,\varepsilon_1} \cap U_{F_2,\varepsilon_2}$.
(3) Für alle $U \in \mathcal{U}$ existiert ein $V \in \mathcal{U}$ sodaß $V + V \subset U$, denn es gilt $U_{F,\varepsilon/2} + U_{F,\varepsilon/2} \subset U_{F,\varepsilon}$.
(4) Alle $U \in \mathcal{U}$ sind absorbierend, denn falls $\lambda > \frac{1}{\varepsilon} \max_{p \in F} p(x_0)$ ist, so folgt $x_0 \in \lambda \cdot U_{F,\varepsilon}$.
(5) Für alle $U \in \mathcal{U}$ und $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ existiert ein $V \in \mathcal{U}$ sodaß $\lambda \cdot V \subset U$, weil es ist $\lambda \cdot U_{F,\varepsilon/\lambda} = U_{F,\varepsilon}$.
(6) Jedes $U \in \mathcal{U}$ ist kreisförmig.

(7) Jedes $U \in \mathcal{U}$ ist absolutkonvex.

DEFINITION 2.5. Wir definieren nun die folgende Topologie auf X. Dabei heißt eine Menge $O \subset X$ offen genau dann wenn für jedes $x \in O$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert sodaß

$$x + U \subset O.$$

BEHAUPTUNG 2.6. Die Menge $\mathcal{T} = \{O \subset X\ :\ O \text{ ist offen}\}$ ist eine Topologie.

BEWEIS. Zu zeigen sind die definierenden Eigenschaften einer Topologie. $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$. Seien O_1 und O_2 offen. Zu zeigen ist, dass $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$. Sei $x \in O_1 \cap O_2$. Aus der Definition von „offen" folgt:

$$\exists U_1, U_2 \in \mathcal{U}\ :\quad x + U_1 \in O_1 \quad \text{und} \quad x + U_2 \in O_2.$$

Eigenschaft (2) impliziert, dass $\exists U \in \mathcal{U}$, sodass $U \subset U_1 \cap U_2$ und damit

$$x + U \in O_1 \cap O_2$$

Da x beliebig gewählt war, ist $O_1 \cap O_2$ offen.
Seien O_i offen, $i \in I$. Zu zeigen ist: $\bigcup_{i \in I} O_i$ offen. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$ beliebig, aber fix.

$$\Rightarrow \quad \exists i_0 \in I\ :\quad x \in O_{i_0} \text{ offen}$$

$$\Rightarrow \quad \exists U \in \mathcal{U}\ :\quad x + U \subset O_{i_0} \quad \Rightarrow \quad x + U \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Aufgrund der Beliebigkeit von x folgt: $\bigcup_{i \in I} O_i$ ist offen.

□

LEMMA 2.7. *Bezüglich der in Definition 2.5 beschriebenen Topologie* $\mathcal{T}$ *sind*
(a) Addition $+\ :\ X \times X \to X,\ (x, y) \mapsto x + y$
(b) Skalarmultiplikation $\cdot\ :\ \mathbb{R} \times X \to X,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$
stetige Abbildungen bezüglich ihrer jeweiligen Produkttopologien.

BEWEIS. Sei $O \subset X$ offen, dann ist zu zeigen:
(a) $\widetilde{O} := \{(x, y)\ :\ x + y\ \in\ O\}$ ist offen
(b) $\overline{O} := \{(\lambda, x)\ :\ \lambda x\ \in\ O\}$ ist offen
Wir betrachten also jeweils die Urbilder und weisen deren Offenheit nach.

(a) Sei nun $(x, y) \in \widetilde{O}$, also $x + y \in O$. O ist offen in X, per Definition gilt daher $\exists U \in \mathcal{U}\ :\ x + y + U \in O$. Mit der Eigenschaft (3) folgt $\exists V \in \mathcal{U}\ :\ V + V \subset U$ und damit $(x + V) + (y + V)\ \subset\ x + y + U\ \subset\ O$. Insbesondere gilt also

$$(x + V) + (y + V) \subset O$$

also $x + v_1 + y + v_2 \ \in\ O$ $(\forall v_1, v_2 \in V)$. Mit der Wahl $W := x + V$ und $\widetilde{W} := y + V$ gilt:

$$(x, y) \in \widetilde{O} \quad \Rightarrow \quad (x, y) \in (W \times \widetilde{W}) \subset \widetilde{O},$$

und weil $(W \times \widetilde{W})$ offen in der Produkttopologie ist, folgt die Behauptung.

(b) Sei $(\lambda, x) \in \overline{O}$ beliebig, also $\lambda x \in O$. Per Definition von „offen" gilt daher $\exists U \in \mathcal{U}\ :\ \lambda x + U\ \subset\ O$.

Mit der Eigenschaft (3) folgt $\exists V \in \mathcal{U}\ :\ V + V \subset U$. Da V absorbierend ist, folgt aus Eigenschaft (4):

$$\exists \varepsilon > 0\ :\quad \varepsilon x \in V.$$

Unter Ausnutzung der Kreisförmigkeit von V können wir Eigenschaft (6) anwenden:

$$(\mu - \lambda)x \in V, \quad \text{falls } |\mu - \lambda| < \varepsilon.$$

Mit den Eigenschaften (5) und (6) folgt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung:

$$\exists W \in \mathcal{U} \ : \quad \mu W \subset V \quad \text{falls } |\mu| \leq |\lambda| + \varepsilon.$$

Damit folgt $\forall \mu \ : \ |\mu - \lambda| < \varepsilon \ \forall w \in W$:

$$\mu(x+w) - \lambda x \quad = \quad \underbrace{(\mu-\lambda)x}_{\in V} + \underbrace{\mu w}_{\in V} \ \in \ V + V \ \subset U$$

Das heißt, $\mu(x+W) - \{\lambda x\} \subset U$

$$\mu(x+W) \ \subset \ \lambda x + U \ \subset O \quad (\forall \mu \ : \ |\mu - \lambda| < \varepsilon)$$

Zusammenfassend:

$$(\lambda, x) \ \in \ \underbrace{\{\mu \ : \ |\mu - \lambda| < \varepsilon\}}_{\text{offen in } \mathbb{R}} \times \underbrace{(x+W)}_{\text{offen in } X} \quad \subset \quad \overline{O}$$

□

Definition 2.8. Sei P eine Menge von Halbnormen auf dem Vektorraum X, und $\mathcal{T}$ die Topologie gegeben durch

$$O \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in O \, \exists U \in \mathcal{U} \, : \, x + U \subset O,$$

wobei

$$\mathcal{U} = \big\{ U_{F,\varepsilon} \ : \ F \subset P \text{ endlich}, \ \varepsilon > 0 \big\},$$
$$U_{F,\varepsilon} = \big\{ x \in X \ : \ p(x) \leq \varepsilon \text{ für alle } p \in F \big\}.$$

Dann heißt $(X, \mathcal{T})$ lokalkonvexer (topologischer) (Vektor)raum.

Beispiel. (a) Sei T eine nichtleere Menge, und X ein Vektorraum von Funktionen auf T. Betrachte $p_t(x) = |x(t)|$, $t \in T$, $x \in X$. Die Familie von Halbnormen $P = \{p_t \ : \ t \in T\}$ erzeugt die lokalkonvexe Topologie der punktweisen Konvergenz.

(b) Betrachte $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (der Raum der Schwartzfunktionen) und sei

$$p_{\alpha,m}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^m) \, \big| \big(D^\alpha \varphi\big)(x) \big|,$$

wobei $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, α ist ein Multiindex und $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$. Die Menge von Halbnormen $P = \{p_{\alpha,m} \ : \ \alpha, m\}$ erzeugt eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Sei X ein normierter Raum. Betrachte die Halbnormen $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$, wobei $x^* \in X^*$ und $x \in X$, und definiere $P = \{p_{x^*} \ : \ x^* \in X^*\}$. Die Familie von Halbnormen P erzeugt die schwache Topologie auf X, oft auch mit $\sigma(X, X^*)$ bezeichnet.

(d) Sei X ein normierter Raum. Auf seinem Dualraum X^* definieren wir die Halbnormen $p_x(x^*) = |x^*(x)|$, wobei $x^* \in X^*$ und $x \in X$, und definiere $P = \{p_x \ : \ x \in X\}$. Die Familie von Halbnormen P erzeugt die schwach* Topologie auf X^*, oft auch mit $\sigma(X^*, X)$ bezeichnet.

Satz 2.9. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. X ist genau dann lokalkonvex wenn es eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen absorbierenden Mengen gibt.*

Beweisskizze.

X lokalkonvex $\quad \Rightarrow \quad$ Es gibt eine Nullumgebungsbasis (Eigenschaften von $\mathcal{U}$)

Umgekehrt können wir mit dem Minkowski-Funktional $p_U(x) := \inf\{\lambda > 0 \ : \ x \in \lambda \cdot U\}$ $(\forall U \in \mathcal{U})$ eine Menge von Halbnormen definieren:

$$P := \{p_U \ : \ U \in \mathcal{U}\}$$

Aus P erzeugen wir die Topologie σ und zeigen, dass $\sigma = \mathcal{T}$.

□

3. Stetige Funktionale und der Satz von Hahn–Banach

LEMMA 2.10. *Sei P eine Familie von Halbnormen welche die lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ auf X erzeugt.*

(a) Für eine Halbnorm $q : X \to [0,\infty)$ sind äquivalent:
  (i) q ist stetig,
  (ii) q ist stetig bei 0,
  (iii) $\{x \in X : q(x) \leq 1\}$ ist eine Nullumgebung.

(b) Alle $p \in P$ sind stetig.

(c) Eine Halbnorm q ist genau dann stetig wenn ein $M \geq 0$ und eine endliche Menge $F \subset P$ existieren sodaß für alle $x \in X$ gilt

$$q(x) \leq M \cdot \max_{p\in F} p(x).$$

BEWEIS A. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt aus Nachprüfen der Definitionen.
Wir zeigen *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*:
Wir wissen, dass $\{x \in X : q(x) \leq 1\}$ ist Nullumgebung. Zu zeigen ist, dass q stetig ist, d.h.

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists O \subset X \text{offen} \ :\quad q(O) \ \subset\ \underbrace{(q(x)-\varepsilon, q(x)+\varepsilon)}_{\text{offene Menge in } \mathbb{R}}$$

Wir nehmen eine beliebige Menge im *Bildbereich*, und zeigen dass es dazu eine offene Menge im *Urbildbereich* gibt.

Wir fixieren $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ und wir definieren:

$$U \ :=\quad \frac{\varepsilon}{2}\{x \in X \ :\ q(x) \leq 1\} \quad=\quad \{y \ :\ q(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt

$$|q(x+y) - q(x)| \ \leq\ q((x+y)-x) \ =\ q(y)$$

$$\Rightarrow\quad \forall y \in U \ :\quad |q(x+y)-q(x)| \ \leq\ q(y) \ \leq\ \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \forall z \in \underbrace{x+U}_{=:\,O} \ :\quad |q(z)-q(x)| \ \leq\ \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\quad q(O) \ \subset\ (q(x)-\varepsilon, q(x)+\varepsilon)$$

$\square$

BEWEIS B. Per Definition von $\mathcal{T}$ ist $\{x \ :\ p(x) \leq 1\}$ eine Nullumgebung $\forall p \in P$. Somit gilt nach (a), dass p stetig ist. $\square$

BEWEIS C. nach (a) gilt, dass

$$q \text{ stetig} \quad\Leftrightarrow\quad \exists \varepsilon > 0\ \exists F \subset P \text{ endlich} \ :\quad U_{F,\varepsilon} \overbrace{\subseteq}^{(i)\Leftrightarrow(iii)} \{x \in X \ :\ q(x) \leq 1\}$$

$x \in U_{F,\varepsilon}$ ist nach Definition äquivalent zu $\max_{p\in F} p(x) \leq \varepsilon$.

Da $U_{F,\varepsilon} \subseteq \{x \in X \ :\ q(x) \leq 1\}$, folgt daraus $q(x) \leq\ 1$.

Wir wissen damit weiters, dass $\frac{\varepsilon}{\max_{p\in F} p(x)} x \in U_{F,\varepsilon} \quad (\forall x)$.

$$\Rightarrow\quad \forall x \in X \ :\quad 1 \ \geq\ q(\frac{\varepsilon}{\max_{p\in F} p(x)} x) \ =\ \frac{\varepsilon}{\max_{p\in F} p(x)} \cdot q(x)$$

und somit

$$q(x) \ \leq\ \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{=:M} \max_{p\in F}\ p(x).$$

□

SATZ 2.11. *Seien P und Q Familien von Halbnormen auf den Vektorräumen X und Y, und $\mathcal{T}_P$ und $\mathcal{T}_Q$ bezeichnen die jeweils davon induzierten Topologien. Für eine lineare Abbildung $T : (X, \mathcal{T}_P) \to (Y, \mathcal{T}_Q)$ sind äquivalent:*

(i) T *ist stetig,*
(ii) T *ist stetig in* 0,
(iii) Für jede stetige Halbnorm q auf Y ist $p := q \circ T$ eine stetige Halbnorm auf X.
(iv) Für alle $q \in Q$ existieren ein endliches $F \subset P$ und ein $M \geq 0$ sodaß für alle $x \in X$ gilt

$$q(Tx) \leq M \cdot \max_{p \in F} p(x).$$

BEWEIS. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar, (ii) $\Rightarrow$ (i) (Translationen sind stetig).
(ii) $\Rightarrow$ (iii) gilt wegen des vorigen Lemmas (Teil (a)), der Linearität von T und dem Faktum, dass die Komposition stetiger Funktionen stetig ist.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) ist die Aussage des vorigen Lemmas, Teil (c).
Zu zeigen ist: (iv) $\Rightarrow$ (ii) :

Sei $V \subset Y$ eine beliebige Nullumgebung. Wir können annehmen, dass V die Form $\{y \in Y \ : \ \max_{1 \leq \ n} q_i(y) \leq \varepsilon\}$ hat. Wir müssen zeigen, dass eine Nullumgebung $U \subset X$ existiert, sodass $T(U) \subset V$.
Wir wenden unsere Voraussetzung (iv) für alle q_i $(1 \leq i \leq n)$, die in V vorkommen, an:

$$\forall 1 \leq i \leq n \ \exists F_i \subset P \ \exists M_i \geq 0 \ : \quad q(Tx) \leq M_i \cdot \max_{p \in F_i} p(x)$$

$$F := \bigcup_{i=1}^{n} F_i \qquad M := \max_{1 \leq i \leq n} M_i$$

$$\Rightarrow \quad \max_{1 \leq i \leq n} q_i(Tx) \leq M \cdot \max_{p \in F} p(x) \quad (\forall x).$$

Für $x \in U_{F,\varepsilon/M}$ gilt zusätzlich

$$\max_{p \in F} p(x) \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

$$\Rightarrow \quad \max_{1 \leq i \leq n} q_i(Tx) \quad \underbrace{\leq}_{(iv),\text{ Def. F und M}} \quad M \cdot \max_{p \in F} p(x) \quad \underbrace{\leq}_{x \in U_{F,\varepsilon/M}} \quad \varepsilon \ \ (\forall x \in U_{F,\varepsilon/M})$$

$$\Leftrightarrow \quad T(U_{F,\varepsilon/M}) \subset V.$$

□

DEFINITION 2.12. (a) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum. Die Menge der stetigen linearen Funktionale auf $(X, \mathcal{T})$ heißt Dualraum und wird mit $(X, \mathcal{T})$ (oder kurz X^*) bezeichnet.
(b) Die Menge der linearen stetigen Funktionen zwischen den lokalkonvexen Räumen $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ wird mit $L((X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2))$ (oder kurz mit $L(X, Y)$) bezeichnet.

BEHAUPTUNG 2.13. Sowohl $L(X, Y)$ und damit auch X^* sind Vektorräume.

BEWEIS. Seien S und $T \in L(X, Y)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und seien P bzw. Q die Mengen der Halbnormen, die die Topologien $\mathcal{T}_1$, bzw. $\mathcal{T}_2$ erzeugen. Dann gilt wegen des des letzten Lemmas ($(i) \Leftrightarrow (iv)$):

$$\lambda S + \mu T \text{ stetig} \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall q \in Q\ \exists F \subset P \text{ endlich } \exists M > 0\ \forall x \in X\ :\quad q((\lambda S + \mu T)(x)) \leq M \cdot \max_{p \in F} p(x)$$

Da alle $q \in Q$ Halbnormen sind, gilt die Dreiecksungleichung, die Skalare können im Betrag rausgezogen werden und die gesuchte Ungleichung folgt. X^* ist ein Spezialfall von $L(X,Y)$ mit $Y = \mathbb{R}$. □

SATZ 2.14. *Sei $(X, \mathcal{T}_P)$ ein lokalkonvexer Raum. Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ konvergiert gegen x genau dann wenn $\lim p(x_i - x) = 0$.*

BEWEIS. „$\Rightarrow$“: Wir nehmen $(x_i) \to x$ an. Da „+“ ein Homöomorphismus ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x = 0$ annehmen. Aufgrund der Stetigkeit von p folgt $p(x_i) \to 0$.

„$\Leftarrow$: Nehmen wir in der Rückrichtung $\lim p(x_i - x) = 0$ an.
Sei $U_{F,\varepsilon}$ eine beliebige Nullumgebung, d.h.

$$U_{F,\varepsilon} = \{x \in X\ :\ p(x) \leq \varepsilon\ \forall p \in F\} \quad \text{für } F \subset P \text{ endlich, } \varepsilon > 0$$

Unsere Annahme ist äquivalent zu $\forall p \in F\ \exists i_p\ \forall i \geq i_p\ :\ p(x_i) \leq \varepsilon$. Wir wählen $p \in F$ beliebig, aber fix und setzen $i_0 := \max_{p \in F} i_p$. Da F endlich ist, jedes dieser i_p existiert und es in einem Netz für alle Indizes einen Index gibt, der größer als die bisherigen ist, ist i_0 wohldefiniert. Durch diese Definition haben wir unseren Existenzquantor „eliminiert“, es bleibt zu zeigen dass i_0 die gewünschten Eigenschaften hat. Auf jeden Fall gilt:

$$\forall p \in F\ \forall i \geq i_0\ :\quad p(x_i)\ \leq\ \varepsilon$$

Daraus folgt, dass für alle $i \geq i_0$ x_i aus $U_{F,\varepsilon}$ ist. Insgesamt gilt:

$$\forall U \in \mathfrak{U}\ \exists i_0\ \forall i \geq i_0\ :\quad x_i \in U \quad \Leftrightarrow \quad x_i \to 0$$

□

SATZ 2.15. *In lokalkonvexen Räumen ist*
(i) der Abschluß konvexer Mengen konvex,
(ii) der Abschluß absolutkonvexer Mengen absolutkonvex.

BEWEIS. In topologischen Räumen gilt:

$$t \in \overline{M} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (t_i) \subset M \text{ Netz } :\ t_i \to t$$

(a) Seien $x, y \in \overline{C}$, C konvex. Da $x, y \in \overline{C}$ gibt es Netze $(x_i), (y_i)$ mit Elementen aus C, sodass

$$x_i \to x \qquad \text{und} \qquad y_i \to y.$$

Aus der Konvexität von C folgt $\forall\ 0 \leq \lambda \leq 1\ :$

$$\lambda x_i + (1-\lambda) y_i\ \in C$$

$$\lambda x_i + (1-\lambda) y_i \quad \to \quad \underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{\in \overline{C}}.$$

(b) analog zu (a)

□

SATZ 2.16. *Sei $(X, \mathcal{T}_P)$ ein lokalkonvexer Raum und $U \subset X$ ein Untervektorraum. Für jedes $\ell \in U^*$ existiert eine stetige Fortsetzung L von ℓ, also $L \in X^*$.*

BEWEIS. Die Topologie von U wird durch $\{p|_U\ :\ p \in P\}$ erzeugt.
Wegen $l \in U^*$ gilt:

$$\exists p_1, \ldots, p_n \in P\ \exists M \geq 0\ \forall x \in U\ :\quad |l(x)| \leq M \cdot \max_{1 \leq i \leq n} p_i(x).$$

Setze

$$p(x) := M \cdot max_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \ (\forall x \in X),$$

dann ist $p \ : \ X \to [0, \infty)$ ist eine *stetige Halbnorm* auf X $(M = 1)$ mit (per Definition)

$$|l(x)| \leq p(x) \quad (\forall x \in X)$$

Nach dem *Satz von Hahn-Banach für Vektorräume* gilt:

$$\exists L \ : \ X \to \mathbb{R} \text{ lineare Fortsetzung } : \quad L(x) \leq p(x) \ (\forall x \in X)$$

$$\Rightarrow \quad -L(x) = L(-x) \leq p(-x) = p(x) \quad (\forall x \in X)$$

$$|L(x)| \leq p(x) \quad (\forall x \in X)$$

Mit dem Stetigkeit charakterisierenden Lemma (Teil (a), $(i) \Leftrightarrow (iv)$) folgt: L stetig und somit

$$L \in X^*.$$

□

KAPITEL 3

Distributionen

1. Funktionenräume

Die Idee von Distributionen besteht darin Funktionen f als Funktionale T_f gegeben durch

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

auf geeigneten Funktionenräumen aufzufassen.

Beispiel. Für die "Deltafunktion" $\delta : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$, wobei $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \delta = 1$, ist

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Die Funktionen φ werden linear auf eine Zahl abgebildet.

Definition 3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt, dann setzen wir

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_K(\Omega) &= \big\{\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \,/\, \varphi \in C^\infty(\Omega),\, \mathrm{supp}(\varphi) \subset K\big\}\\
p_\alpha(\varphi) &= \sup_{x\in\Omega} \big|\big(D^\alpha \varphi\big)(x)\big|, \qquad \alpha \text{ Multiindex}, \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega),\\
P &= \big\{p_\alpha : \alpha \text{ Multiindex}\big\},
\end{aligned}$$

und stellen fest daß $\mathscr{D}_K(\Omega)$ ein Vektorraum ist und P eine Familie von Halbnormen auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Die von P auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$ erzeugte lokalkonvexe Topologie bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_K$.

Definition 3.2. Wir definieren

$$\mathscr{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K\subset\Omega\\ K \text{ kompakt}}} \mathscr{D}_K(\Omega),$$

wobei $\mathcal{T}_K$ wie zuvor die lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$ bezeichnet. Die Familie von Halbnormen

$$P = \big\{p : \mathscr{D}(\Omega) \to [0\infty) \,/\, {\scriptstyle \substack{p \text{ ist eine Halbnorm}\\ p|\mathscr{D}_K(\Omega) \text{ ist stetig bezüglich } \mathcal{T}_K\\ \text{für alle } K \subset \Omega \text{ kompakt}}}\big\}$$

Die von P auf $\mathscr{D}(\Omega)$ erzeugte Topologie wird mit $\mathcal{T}$ bezeichnet.

Lemma 3.3. *Es gelten folgende Aussagen*

(a) Die Relativtopologie von $\mathcal{T}$ auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$ stimmt mit $\mathcal{T}_K$ überein.
(b) $\mathscr{D}_K(\Omega)$ ist $\mathcal{T}$ abgeschlossen in $\mathscr{D}(\Omega)$
(c) Sei Y ein lokalkonvexer Raum und $L : \mathscr{D}(\Omega) \to Y$ linear. Dann ist L genau dann $\mathcal{T}$ stetig wenn für alle kompakten $K \subset \Omega$ gilt $L|\mathscr{D}_K(\Omega)$ ist $\mathcal{T}_K$ stetig.

Beweis. (a) $\mathcal{T}|\mathscr{D}_K(\Omega) = \{\mathcal{O} \cap \mathscr{D}_K(\Omega) : \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$ sind erzeugt durch p_α, jedes $p \in P$ ist $\mathcal{T}_k$-stetig. Außerdem ist jedes p_α $\mathcal{T}|\mathscr{D}_K(\Omega)$-stetig. Somit gilt $\mathcal{T}|\mathcal{D}_K(\Omega) = \mathscr{T}_K$.

(b) Seien $x \in \Omega$ und $\pi_x(\varphi) := |\phi(x)|$. Es gilt $\pi_x \in P \Rightarrow \pi_x$ ist $\mathcal{T}$-stetig. $\{0\} \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Da das Urbild abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen abgeschlossen ist, gilt $\pi_x^{-1}[0]$ ist abgeschlossen in $\mathcal{T}$. Es gilt

$$\bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \pi_x(\varphi) = 0\} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \underbrace{|\varphi(x)| = 0 \ \forall\ x \in \Omega \setminus K}_{\Leftrightarrow \operatorname{supp}(\varphi) \subset K}\}$$
$$= \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Somit ist $\mathcal{D}_K(\Omega)$ abgeschlossen in $\mathcal{D}(\Omega)$, da der Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

(c) "$\Rightarrow$" L ist $\mathcal{T}$-stetig. z.z.: $\forall\ K \subset \Omega$ kompakt : $L|\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist $\mathcal{T}$-stetig. Es ist leicht zu zeigen, dass $L|\mathcal{D}_K(\Omega)$ $\mathcal{T}|\mathcal{D}_K(\Omega)$-stetig ist. Mit (a) folg nun die Aussage.
"$\Leftarrow$" Sei $K \subset \Omega$ kompakt und $L|\mathcal{D}_K(\Omega)\mathcal{T}_K$ -stetig. q sei eine stetige Halbnorm auf Y.
Dann ist $q \circ L|\ D_K(\Omega)$-stetig und eine Halbnorm auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Es gilt also $\forall K$: $q \circ L|\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist $\mathcal{T}_K$ -stetig. Daraus folgt $\forall q$ stetige Halbnorm : $q \circ L \in P$. Also ist $q \circ L$ für jede Halbnorm stetig $\Rightarrow L$ ist stetig.

□

Satz 3.4. *Sei $\{\varphi_n\}_n \subset \mathscr{D}(\Omega)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\varphi_n \to 0$ *bezüglich* $\mathcal{T}$.
(ii) Es exisitert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ sodaß $\{\varphi_n\}_n \subset \mathscr{D}_K(\Omega)$ und $\varphi_n \to 0$ bezüglich $\mathcal{T}_K$.
(iii) Es exisitert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ sodaß $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$, $n \in \mathbb{N}$ *und für alle Multiindizes α konvergiert $(D^\alpha\varphi_n)_n$ gleichmäßig gegen* 0.

Beweis. (ii)$\Leftrightarrow$(iii) ist lediglich eine Umformulierung.
(ii)$\Rightarrow$(i): Nach einer Charakterisierung über Netzkonvergenz gilt:

$$\varphi_n \to 0 \text{ bzgl. } \mathcal{T}_k \ \Leftrightarrow\ \forall \alpha : p_\alpha(\varphi_n) \to 0.$$

Die Aussage folgt dann mit der Definition von $\mathcal{T}$.
(i)$\Rightarrow$(ii): Klarerweise folgt aus $\varphi_n \to 0$ bzgl. $\mathcal{T}$, dass $\varphi_n \to 0$ bzgl. $\mathcal{T}_K$.
Für die andere Behauptung von (ii) führen wir einen Widerspruchsbeweis. Wir wissen:

$$\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \subset \Omega \\ \text{komp.}}} \mathscr{D}_K(\Omega), \quad \text{also}$$
$$\forall n\ \exists K \subset \Omega \text{ komp.: } \operatorname{supp}\varphi_n \subset K$$

Da wir das Gegenteil annehmen, müsste gelten $\forall k\ \exists n \in \mathbb{N}$: $\operatorname{supp}\varphi_n \not\subset K$. Wir wählen eine gegen Ω aufsteigende Folge kompakter Mengen und eine Teilfolge ψ_n von φ_n:

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega, \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i^\circ = \Omega$$
$$\{\psi_n\} \subset \{\varphi_n\}, \quad \psi_n \in \mathscr{D}_{K_n}(\Omega) \setminus \mathscr{D}_{K_{n-1}}(\Omega).$$

Seien weiters $x_n \in K_n \setminus K_{n-1}$ und $\alpha_n := |\psi_n(x_n)|$, sodass $\alpha_n > 0$. Wir definieren

$$\pi_n(\varphi) := |\varphi(x_n)|\alpha_n^{-1} \quad \text{und} \quad \pi := \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n.$$

Dann sind π_n $\mathcal{T}$-stetige Halbnormen. Wir wollen zeigen, dass π auch eine Halbnorm ist. Seien dazu $K \subset \Omega$ kompakt, π_n wie eben und n so, dass $K \subset K_n$, also $\mathscr{D}_K(\Omega) \subset \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$. Für $n > m$ gilt $x_n \notin K_m$ und

$$\pi_k|\mathscr{D}_{K_n}(\Omega) \equiv 0 \quad \forall n > m,$$

also ist π keine Reihe, sondern lediglich eine endliche Summe von Halbnormen und somit selbst wieder eine Halbnorm. Ist $K \subset K_N$ kompakt, dann gilt

$$\pi|\mathscr{D}_{K(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \pi_i|\mathscr{D}_K(\Omega) \text{ ist } \mathcal{T}_K\text{-stetig.}$$

Somit ist $\pi \in P$ und $\mathcal{T}$-stetig. Daher ist

$$\pi(\psi_n) \geq \pi_n(\psi_n) = 1.$$

Andererseits gilt wegen $\varphi_n \to 0$ bzgl. $\mathcal{T}$ auch $\pi(\varphi_n) \to 0$ und weiters, da ψ_n eine Teilfolge von φ_n ist: $\pi(\psi_n) \to 0$. Das steht aber im Widerspruch zu $\pi(\psi_n) \geq 1$. $\square$

Definition 3.5. Der Dualraum von $(\mathscr{D}(\Omega), \mathcal{T})$ wird mit $\mathscr{D}^*(\Omega)$ bezeichnet und heißt Raum der Distributionen auf Ω.
Die Elemente von $\mathscr{D}(\Omega)$ heißen Testfunktionen.

Satz 3.6. *Für eine lineare Abbildung $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) $T \in \mathscr{D}^*(\Omega)$.
(ii) Für alle kompakten $K \subset \Omega$ gilt $T|\mathscr{D}_K(\Omega) \in \big(\mathscr{D}_K(\Omega)\big)^*$.
(iii) Für alle kompakten $K \subset \Omega$ existieren $m \in \mathbb{N}_0$ und $C \geq 0$ sodaß für alle $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ gilt

$$\big|T(\varphi)\big| \leq C\, p_m(\varphi) = C \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \big|\big(D^\alpha \varphi\big)(x)\big|.$$

(iv) Falls $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ bezüglich $\mathcal{T}$, so folgt $T(\varphi_n) \to 0$ in $\mathbb{C}$.

Beweis. (i)⇔(ii) folgt mit Lemma 3.3 c).
(i)⇒(iv) Die Behauptung folgt mit der Beschreibung von Netzkonvergenz.
(ii)⇔(iii) folgt mit 2.11.
(iv)⇒(ii) Dise Implikation sagt aus, dass aus Folgenstetigkeit topologische Stetigkeit folgt. Wir beweisen, dass $\mathcal{T}_k$ von einer Halbmetrik erzeugt wird. Daraus folgt dann die Behauptung, da in (halb-)metrischen Räumen Folgenstetigkeit äquivalent zur topologischen Stetigkeit ist.
Wir beweisen dies in zwei Schritten:

Beh. 1: P bezeichne die Halbnormfamilie, durch die $\mathcal{T}$ erzeugt wird.

$$d : X^2 \to [0,\infty)\,,\ (x,y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

Behauptung: d ist Halbmetrik, die $\mathcal{T}$ erzeugt.
Beweis: $d(x,x) = 0$ und $d(x,y) = d(y,x)$ ist einfach zu sehen. Für den Beweis der Dreiecksungleichung setzen wir $\phi(t) := \frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+\frac{1}{t}}$. ϕ, das offensichtlich monoton wachsend und sublinear ist:

$$\forall s,t : \phi(s+t) \leq \phi(s) + \phi(t)$$

Da die Summanden in d genau diese Form haben, können wir folgern:

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)+p_n(y-z)}{1+p_n(x-y)+p_n(y-z)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{p_n(x-y)}{1+p_n x-y} + \frac{p_n(y-z)}{1+p_n(y-z)} \right) = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

d ist also eine Halbmetrik. Wird auch $\mathcal{T}$ von ihr erzeugt? Zunächst zeigen wir: $\mathcal{O}$ offen bzgl. d, dann gilt $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{O}$ ist offen bzgl. d genau dann, wenn $\forall x \in \mathcal{O} \exists \epsilon > 0 \forall y \in X : d(x,y) < \epsilon \Rightarrow y \in \mathcal{O}$.

$$d(x,y) < \epsilon. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} < \epsilon.$$

Wir stellen fest:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall x, y \in X : \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} < \epsilon.$$

Sei nun $x \in \mathcal{O}$. ϵ sei nun so, dass $\forall y \in X : d(x,y) < 2\epsilon \Rightarrow y \in \mathcal{O}$ und N wie eben. Außerdem sei

$$U := \{y \in X : \max_{1 \leq n \leq N} p_n(x-y) \leq \epsilon\}.$$

Dann gilt offenbar $x \in U$, $U \in \mathcal{T}$ und:

$$U \subset \mathcal{O} : y \in U \Leftrightarrow \forall 1 \leq n \leq N : p_n(x-y) < \epsilon$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \leq \epsilon \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \leq \epsilon$$

Also insgesamt:

$$d(x,y) < 2\epsilon.$$

Daraus folgt nun $U \subset \mathcal{O}$. Zusammenfassend haben wir also gezeigt:

$$\forall x\ \exists U \in \mathcal{T} \text{ Umgebung von } x\ \forall y \in U : y \in \mathcal{O},$$

also $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$.
Es bleibt zu zeigen: $\mathcal{O}$ offen in $\mathcal{T} \Rightarrow$ offen bezüglich d. Sei nun $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$, das heißt: $\forall x \in \mathcal{O} \exists U \in \mathcal{V} : x + U \subset \mathcal{O}$. Weiters wissen wir, dass $\forall x \in \mathcal{O} \exists F \subset P$ endl. $\exists \epsilon > 0 : x + U_{F,\epsilon} \subset \mathcal{O}$.
Sei $N := \max\{n \colon p_n \in F\}$ und $x \in \mathcal{O}$ beliebig, dann gilt:

$$\forall y \colon d(x,y) y \epsilon' \Rightarrow \forall n \colon 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} < \epsilon.$$

Ist ϵ' hinreichend klein, gilt

$$\forall n \leq N \colon p_n(x-y) < \frac{2^n \epsilon'}{1-2^n \epsilon'} \leq \frac{2^N \epsilon'}{1-2^N \epsilon'}.$$

Also

$$\forall \epsilon' > 0 \forall n \leq N \colon d(x,y) < \epsilon' \Rightarrow p_n(x-y) < \frac{2^N \epsilon'}{1-2^N \epsilon'}$$

Wir wählen nun ϵ' so, dass $\frac{2^N \epsilon'}{1-2^N \epsilon'} < \epsilon$. Dann erhalten wir insgesamt:

$$d(x,y) < \epsilon' \Rightarrow p_n(x-y) \leq \epsilon \forall n \leq N$$
$$\Rightarrow \forall p \in F : p(x-y) \leq \epsilon \Rightarrow y \in x + U_{f,\epsilon}$$
$$\Rightarrow y \in \mathcal{O}.$$

Also: $\forall x \in \mathcal{O} \exists \epsilon' > 0 \forall y \colon d(x,y) < \epsilon' \Rightarrow y \in \mathcal{O}$, das heißt $\mathcal{O}$ ist offen bzgl. d. Somit ist Behauptung 1 bewiesen.

Beh. 2: Behauptung: Ist (X,d) ein halbmetrischer, Y ein topologischer Raum, $f \colon X \to Y$ folgenstetig in X, dann ist f topologisch stetig in X.
Beweis: Wir erinnern an die Definitionen:

- f folgenstetig $\Leftrightarrow \forall x_n \to x \colon f(x_n) \to f(x)$
- f topologisch stetig $\Leftrightarrow \forall V$ Umgebung von $f(x) \exists U$ Umgebung von x: $f(U) \subset V$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an f ist folgenstetig, aber nicht topologisch stetig, d.h.:

$\exists V$ Umgebung von $f(x)$ $\forall U$ Umgebung von x: $f(U) \not\subset V$

$\forall \epsilon > 0$: $f(B_d(x,\epsilon)) \not\subset V$

d. h. $\forall \epsilon > 0\ \exists y \in B_d(x,\epsilon)$: $f(y) \in V^C$

$\Rightarrow \exists x_n \to x\ \forall n$: $x_n \in B_d(x, 1/n) \wedge f(x_n) \in v^C$.

Also $f(x_n) \in V^C \Rightarrow f(x)$ in V^C da V^C. Somit ist auch die zweite Behauptung bewiesen.

Aus den beiden Beauptungen folgt nun, dass $\mathcal{T}_k$ halbmetrisierbar ist, und somit ist der Beweis der Richtung (iv)⇒(ii) beendet. □

Beispiel. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ meßbar. Dann heißt f lokal integrierbar falls

$$\int_K f(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \qquad \text{für alle kompakten } K \subset \Omega.$$

Wir definieren den Raum

$$L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \ / \ f \text{ ist lokal integrierbar} \big\},$$

und für jedes $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ definieren wir die lineare Abbildung $T_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ durch

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Beachte daß T_f wohldefiniert ist, weil ja $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega$ kompakt ist.

Wir zeigen nun daß $T_f \in \big(\mathscr{D}(\Omega)\big)^*$, das heißt T_f ist eine Distribution. Für $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \big|T_f(\varphi)\big| &= \Big| \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \Big| \\ &\le \int\limits_{\mathrm{supp}(\varphi)} \big|f(x)\,\varphi(x)\big|\,\mathrm{d}x \\ &\le \int\limits_{\mathrm{supp}(\varphi)} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \cdot \sup_{x\in\Omega} \big|\varphi(x)\big| \\ &\le C(f, \mathrm{supp}(\varphi)) \cdot p_0(\varphi). \end{aligned}$$

Damit ist nach Satz 3.6 T_f tatsächlich eine Distribution. Distributionen der Form T_f, wobei $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ heißen reguläre Distributionen.

Wir zeigen jetzt daß die Abbildung $f \mapsto T_f : L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega) \to \big(D(\Omega)\big)^*$ injektiv ist. Sei also $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega)$ so daß $T_f = 0$, das heißt also

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Also muß gelten $f = 0$ fast überall.

(b) Sei $x_0 \in \Omega$ fixiert, und betrachte das lineare Funktional $\delta_{x_0} : \varphi \mapsto \varphi(x_0)$, für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Weil

$$\big|\delta_{x_0}(\varphi)\big| = \big|\varphi(x_0)\big| \le p_0(\varphi)$$

folgt $\delta_{x_0} \in \big(\mathscr{D}(\Omega)\big)^*$. Diese Distribution heißt Deltadistribution. Wir zeigen nun daß δ_{x_0} *keine* reguläre Distribution ist. Dazu setzen wir $\Omega_0 = \Omega \setminus \{x_0\}$, und stellen fest $\delta_{x_0}|\mathscr{D}(\Omega_0) = 0$. Angenommen $\delta_{x_0} = T_f$ für ein geeignetes

$f \in L^1_{\mathrm{lok}}(\Omega)$, dann ist $T_f|\mathscr{D}(\Omega_0) = 0$, und weil $f \mapsto T_f$ injektiv ist folgt somit $f|\Omega_0 = 0$ fast überall, und damit natürlich $f = 0$. Folglich ist auch $0 = T_f = \delta_{x_0}$, was offenbar falsch ist.

(c) $\varphi \mapsto \varphi'(0) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^*$, weil $\left|\varphi'(0)\right| \le p_1(\varphi)$.

(d) Sei $T(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ exisitert ein $N \in \mathbb{N}$ sodaß $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-N, +N]$ und folglich

$$\left|T\varphi\right| \le \sum_{n=0}^{N-1} \left|\varphi^{(n)}(n)\right| \le N\, p_{N-1}(\varphi),$$

also $T \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^*$.

Definition 3.7. Seien X, Y lokalkonvexe Räume, und $T \in L(X, Y)$. Wir definieren $T^* : Y^* \to X^*$ als

$$T^*(y^*) = y^* \circ T, \qquad \text{für alle } y^* \in Y^*.$$

Die Abbildung T^* heißt der zu T adjungierte Operator.

Bemerkung 3.8. Beachte daß die Abbildung T^* ist offenbar linear und wohldefiniert ist.

Definition 3.9. Sei X ein lokalkonvexer Raum, dann definieren wir auf seinem Dualraum X^* die schwach* Topologie $\sigma(X^*, X)$ als die von den Halbnormen

$$p_x(x^*) = |x^*(x)| \qquad\qquad P = \left\{p_x \,:\, x \in X\right\}$$

induzierte lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}_P$.

Satz 3.10. *Seien X und Y lokalkonvexe Räume, und $T \in L(X, Y)$. Dann ist $T^* : Y^* \to X^*$ stetig bezüglich $\sigma(Y^*, Y)$ – $\sigma(X^*, X)$ (soll heißen $\sigma(Y^*, Y)$ – $\sigma(X^*, X)$ stetig).*

Beweis. Es gilt:

$$T^* \mathit{stetig} \Leftrightarrow \forall \text{ Netze } (y_i^*)_{i\in I} \text{ in } Y^* \text{ mit } y_i^* \to y^* \colon T^* y_i^* \to T^* y^*.$$

Außerdem gilt: $y_i^* \xrightarrow{\sigma(Y^*,Y)} y^* \;\Leftrightarrow\; q_y(y_i^* - y^*) \to 0 \;\forall y \in Y$,
wobei $q_y(y^*) = |y^*(y)|$. Dies ist genau dann der fall, wenn

$$\begin{aligned} &|(y_i^* - y^*)(y)| \to 0, \quad \text{also:} \\ \Leftrightarrow &\forall y \in Y \colon y_i^*(y) \to y^*(y), \quad \text{und insbesondere} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \colon\, & y_i^*(Tx) \to y^*(TX) \\ &\Leftrightarrow\; (T^* y_i^*)(x) \to (T^* y^*)(x) \\ &\Leftrightarrow\; |(T^* y_i^*)(x) - (T^* y^*)(x)| \to 0 \\ &\Leftrightarrow\; p_x(T^*(y_i^* - y^*)) \;\Leftrightarrow\; T^* y_i^* \to T^* y^*. \end{aligned}$$

□

2. Differentiation von Distributionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, und

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Mit partieller Integration folgt daß

$$T_{f'}(\varphi) = -T_f(\varphi'), \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

DEFINITION 3.11. Sei $T \in \mathscr{D}(\Omega)^*$ und α ein Multiindex. Dann definieren wir

$$\big(D^{(\alpha)}T\big)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

LEMMA 3.12. *Die Abbildung* $D^{(\alpha)} : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ *ist wohldefiniert und* $\sigma(\mathscr{D}(\Omega)^*, \mathscr{D}(\Omega))$*–stetig.*

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, dass $\partial^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ stetig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\forall K\colon \partial^\alpha|\mathcal{D}_K(\Omega) \text{ ist } \mathcal{T}_K\text{-stetig}$$

Wir bezeichnen mit $p_m(\varphi) = \max_{|\beta|\le m}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\beta\varphi(x)|$ die Halbnormen die $\mathcal{T}_K$ erzeugen. Sei nun $m \ge 0$:

$$p_m(\partial^\alpha\varphi) = \max_{|\beta|\le m}\sup_{x\in\Omega}|(\partial^{\alpha+\beta}\varphi)(x)| \le p_{m+|\alpha|}(\varphi).$$

Also ist ∂^α stetig. Daraus folgt dann natürlich sofort, dass $(\partial^\alpha)^*$ stetig in der richtigen Topologie ist. Die Behauptung folgt schließlich mit der Definition von $D^\alpha = (\partial^\alpha)^*(-1)^{|\alpha|}$. □

BEISPIEL. (a) Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Heavisidefunktion, das ist

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \ge 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Sei nun $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$(T_H)'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(x)\Big|_{x=0}^{\infty} = \varphi(0)$$

also ist $(T_H)' = \delta$.

(b) Die distributionelle Ableitung der Deltadistribution ist

$$\delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0),$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

3. Fouriertransformation von Distributionen

DEFINITION 3.13. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ von f für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Oft bezeichnen wir die Fouriertransformierte von f auch mit $\widehat{f}$.

DEFINITION 3.14. Der Vektorraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \Big\{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \Big/ \begin{matrix}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), p_{m,\alpha}(\varphi) < \infty \\ \text{für alle } m \ge 0 \text{ und Multiindizes } \alpha\end{matrix}\Big\},$$

wobei $p_{m,\alpha}(\varphi) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^m)\,\big|\big(D^\alpha\varphi\big)(x)\big|$, heißt Schwartzraum, seine Elemente Schwartzfunktionen.

BEMERKUNG 3.15. Oft wird $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ auch als Raum der schnell fallenden Funktionen bezeichnet. Es gilt

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}).$$

LEMMA 3.16. *Sei* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, α *ein Multiindex, dann gilt*

(a) $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $D^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = (-i)^{|\alpha|}\,\mathcal{F}\big(x \mapsto x^\alpha\varphi(x)\big)$,

(b) $\big(\mathcal{F}(D^\alpha\varphi)\big)(\xi) = i^{|\alpha|}\,\xi^\alpha\,(\mathcal{F}\varphi)(\xi)$.

Beweis. (a)

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\cdot x}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

Da nun $\partial^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\varphi)$ (nachrechnen) und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}\varphi$ unendlich oft differenzierbar.

(b) Nachrechnen.

□

Lemma 3.17. *Für jedes $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathcal{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Ohne Beweis. □

Bemerkung 3.18. Für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt wann immer $\mathcal{F}\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ so ist $\varphi = 0$. Insebesondere gilt für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ daß $\mathcal{F}\varphi \notin \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 3.19. *Die Fouriertransformation ist eine Bijektion von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ die inverse Fouriertransformation ist gegeben durch*

$$\big(\mathcal{F}^{-1}\varphi\big)(x) = (2\,\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\, \varphi(\xi)\, \mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Ohne Beweis. □

Lemma 3.20. *Sei $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ der von den Halbnormen $p_{m,\alpha}$ topologisierte lokalkonvexe Raum, dann gilt*

(a) für alle Multiindizes α daß $\varphi \mapsto x^\alpha\,\varphi$ wohldefiniert und stetig auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist.
(b) für alle Multiindizes β daß $\varphi \mapsto D^\beta\,\varphi$ wohldefiniert und stetig auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist.
(c) es exisitert eine Konstante $C > 0$ für die

$$\big|\big(\mathcal{F}\varphi\big)(\xi)\big| \le C \cdot p_{n+1,0}(\varphi), \qquad \textit{für alle } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Da (a) und (b) einfache Abschätzungen sind, beweisen wir hier nur (c):

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{F}\varphi)(\xi)| &\le C_1 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\xi\cdot x}\,\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\le C_1 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = C_1 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{1}{1+|x|^{n+1}}}_{\le C_2} \underbrace{(1+|x|^{n+1})|\varphi(x)|}_{\le p_{n+1,0}(\varphi)}\,\mathrm{d}x \\
&\le C \cdot p_{n+1,0}(\varphi)
\end{aligned}$$

□

Satz 3.21. *Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und ihre Inverse sind stetig auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der von den Halbnormen $p_{m,\alpha}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie.*

Beweis. Ohne Beweis. □

Definition 3.22. (a) Ein lineares Funktional $T \in \big(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\big)^*$ heißt temperierte Distribution.

(b) Für $T \in \big(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\big)^*$ ist die Fouriertransformierte $\mathcal{F}T$ definiert durch

$$\big(\mathcal{F}T\big)(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi), \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Bemerkung 3.23. Weil $\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, so folgt mit Satz 3.10 $\mathcal{F}^* : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^* \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*$ ist $\sigma(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*, \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ – $\sigma(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*, \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ stetig, und es ist $\mathcal{F}^*T = T \circ \mathcal{F}$, für $T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*$.
Die Abbildung $\mathcal{F}^* : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^* \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*$ ist bijektiv.

Satz 3.24. *(a) Sei $j : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, gegeben durch $j(\varphi) = \varphi$, dann ist j stetig und hat dichtes Bild.*

(b) Die Adjungierte $j^* : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^* \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)^*$ ist gegeben durch $j^*(T) = T|\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und ist injektiv.

Beweis. (a) Wir zeigen $\forall K$ kompakt: $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,. Sei also $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n), m \geq 0, \alpha$ ein Multiinex, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$q_{m,\alpha}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|\partial^\alpha \varphi(x)| \ \leq \ C_{k,m} p_\alpha(\varphi),$$

also ist j stetig. Sei nun $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\eta(x) = 0$ für $|x| \geq 2$ (sodass η glatt). Außerdem sei

$$\varphi_k(x) := \varphi(x)\eta\left(\frac{x}{k}\right) \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\forall k.$$

Wir wollen zeigen: $\varphi_k \overset{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \varphi$. Dies gilt

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \forall q_{m,\alpha}\colon q_{m,\alpha}(\varphi - \varphi_k) \to 0\\ &q_{m,\alpha}(\varphi - \varphi_k) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|\partial^\alpha(\varphi - \varphi_k)|.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}(\varphi - \varphi_k)(x) &= 0, &&\text{falls } |x| \leq k,\\ (\varphi - \varphi_k)(x) &= \varphi(x), &&\text{falls } |x| \geq 2k.\end{aligned}$$

Falls $k \leq |x| \leq 2k$, gilt

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(\varphi - \varphi_k) &= \partial^\alpha \left[(\eta\left(\frac{x}{k}\right) - 1)\varphi(x)\right]\\ &\overset{\text{Leibnitz}}{=} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\alpha(\eta\left(\frac{x}{k}\right) - 1)\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)\end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}&|\partial^\beta(\eta\left(\frac{x}{k}\right) - 1)| \leq \frac{1}{k} C_{\eta,\beta}, \qquad \text{wobei für} \beta = 0 \text{ ist } C_{\eta,\beta} = 1,\\ &\text{also } |\partial^\beta(\eta\left(\frac{x}{k}\right) - 1)| \overset{k\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt nun insgesamt:

$$q_{m,\alpha}(\varphi - \varphi_k) \to 0 \ \Rightarrow \ \varphi_k \to \varphi \text{ in } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

(b) Sei $T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\begin{aligned}&(j^*(T))\varphi = T(j(\varphi)) = T(\varphi)\\ &\Rightarrow j^*T = T|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Sei $T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*$ sodass $j^*T = 0$, also $0 = j^*T\varphi = Tj\varphi$, und somit

$$T|j(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)) \equiv 0 \overset{\text{T stetig}}{\Rightarrow} T = 0.$$

□

Satz 3.25. *Sei $T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*$, dann gilt*

$$\mathcal{F}(D^{(\alpha)}T) = i^{|\alpha|}\, x^\alpha\, \mathcal{F}(T).$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(D^{(\alpha)}T))(\varphi) &= (D^{(\alpha)}T)(\mathcal{F}\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha \mathcal{F}\varphi)\\ &= (-1)^{|\alpha|}(-i)^{|\alpha|}T(\mathcal{F}M_\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}T(\mathcal{F}M_\alpha\varphi)\\ &= i^{|\alpha|}M_\alpha\mathcal{F}T\varphi.\end{aligned}$$

□

Beispiel. (a) Sei $1 \le p \le \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

daß $T_f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\delta_a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^*$, und es gilt

$$\big(\mathcal{F}\delta_a\big)(\varphi) = \delta_a(\mathcal{F}\varphi) = (2\,\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,a\cdot x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

also ist $\mathcal{F}\delta_a$ die von der L^∞–Funktion $x \mapsto (2\,\pi)^{-n/2}\,e^{-i\,a\cdot x}$ induzierte Distribution. Manchmal schreiben wir dafür auch $\mathcal{F}\delta_a = (2\,\pi)^{-n/2}\,e^{-i\,a\cdot x}$.

(c) Sei $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, dann zeigt eine einfache Rechnung daß

$$\big(\mathcal{F}\mathcal{F}(\varphi)\big)(x) = \varphi(-x),$$

und damit folgt dann mit dem vorigen Beispiel

$$\big(\mathcal{F}T_1\big)(\varphi) = \big(\mathcal{F}\mathcal{F}\delta\big)(\varphi) = \delta(\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi) = \varphi(-0) = \delta(\varphi).$$

KAPITEL 4

Schwache Topologien

1. Definition schwacher Topologien

DEFINITION 4.1. Seien X, Y Vektorräume und $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Das Tupel $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt duales Paar, falls
(a) für alle $x \in X \setminus \{0\}$ ein $y \in Y$ existiert sodaß $\langle x, y \rangle \neq 0$, und
(b) für alle $y \in Y \setminus \{0\}$ ein $x \in X$ existiert sodaß $\langle x, y \rangle \neq 0$.

BEISPIEL. (a) Sei X ein lokalkonvexer Hausdorffraum, daß bedeutet für alle $x \in X \setminus \{0\}$ existiert ein $p \in P$ mit $p(x) \neq 0$. Mit dem Satz von Hahn–Banach folgt daß $(x, x^*) \mapsto x^*(x)$ mit (X, X^*) ein duales Paar bildet.
(b) (X^*, X) mit $(x^*, x) \mapsto x^*(x)$ ist ein duales Paar.

DEFINITION 4.2. Sei (X, Y) ein duales Paar.
(a) Für jedes $y \in Y$ betrachten wir die Halbnorm $p_y(x) = |\langle x, y \rangle|$ und setzen $P = \{p_y : y \in Y\}$.
Die von P auf X erzeugte Topologie heißt $\sigma(X, Y)$–Topologie.
(b) Für jedes $x \in X$ betrachten wir die Halbnorm $p_x(y) = |\langle x, y \rangle|$ und setzen $Q = \{p_x : x \in X\}$.
Die von Q auf Y erzeugte Topologie heißt $\sigma(Y, X)$–Topologie.

BEMERKUNG 4.3. (a) Ein Netz $(x_i) \subset X$ konvergiert bezüglich $\sigma(X, Y)$ gegen x genau dann wenn für alle $y \in Y$ gilt $\langle x_i - x, y \rangle \to 0$.
(b) Ein Netz $(y_i) \subset Y$ konvergiert bezüglich $\sigma(Y, X)$ gegen y genau dann wenn für alle $x \in X$ gilt $\langle x, y_i - y \rangle \to 0$.

LEMMA 4.4. *Sei X ein Vektorraum und $\ell, \ell_1, \dots, \ell_n : X \to \mathbb{R}$ linear. Bezeichnen mit N die Menge $\{x : \ell_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, n\}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(i) $\ell \in \operatorname{lin}\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$.
(ii) Es gibt eine Konstante $M \geq 0$ sodaß für alle $x \in X$
$$|\ell(x)| \leq M \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |\ell_i(x)|.$$
(iii) $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \ker(\ell_i) \subset \ker(\ell)$, *das heißt $\ell(x) = 0$ falls $x \in N$.*

BEWEIS. (i)⇒(ii)⇒(iii) sind klar.
(iii)⇒(i): Wir definieren:
$$V := \{(\ell_i(x))_{1 \leq i \leq n} : x \in X\}$$
$$\varphi \colon V \to \mathbb{R}$$
$$(\ell_i(x))_{i \leq n} \mapsto \ell(x)$$
Dann ist φ wohldefiniert und linear (wegen (iii)). Nun folgt:
$$\exists \hat{\varphi} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \colon \hat{\varphi}|V = \varphi \text{ und } \hat{\varphi}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$$

Also insbesondere

$$\varphi(\ (\ell_i(x))_{i=1}^n\ ) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(x),$$

das ist eine Linearkombination der ℓ_i □

KOROLLAR 4.5. *Ein Funktional auf X ist genau dann $\sigma(X,Y)$–stetig wenn es von der Form*

$$x \mapsto \langle x, y\rangle$$

ist. Es gilt also

$$(X, \sigma(X,Y))^* = Y.$$

BEWEIS. Sei $\ell\colon X \to \mathbb{R}$ linear. Dann ist ℓ stetig $\Leftrightarrow |\ell(x)| \le C.\max|\underbrace{\langle x, y_i\rangle}_{=:\ell_i(x)}|$.

Mit dem Lemma folgt nun

$$\ell = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x, y_i\rangle = \langle x, \sum_{i=1}^n y_i\rangle$$

Setzt man $\sum y_i =: y$ folgt schließlich $\ell = \langle\cdot, y\rangle$. □

SATZ 4.6. *Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ lokalkonvexe Topologien auf X und sei $(X,\mathcal{T}_1)^* = (X,\mathcal{T}_2)^*$. Dann ist eine konvexe Menge $C \subset X$ genau dann $\mathcal{T}_1$–abgeschlossen wenn sie $\mathcal{T}_2$–abgeschlossen ist.*

BEWEIS. Ohne Beweis. □

SATZ 4.7. *Die schwache Topologie $\sigma(X,Y)$ ist initial bezüglich Y, das heißt ist T ein topologischer Raum und $f : T \to (X, \sigma(X,Y))$, dann ist f genau dann stetig wenn*

$$y \circ f\ : T \to \mathbb{R}, \quad \text{das heißt} \quad t \mapsto \langle f(t), y\rangle$$

für alle $y \in Y$ stetig ist.

BEWEIS. Wenn f stetig, folgt natürlich, dass $t \mapsto \langle f(t), y\rangle$ stetig ist. Umgekehrt sei $t \mapsto \langle f(t), y\rangle$ stetig für alle $y \in Y$. Sei $t \in T$: Ist U eine $\sigma(X,Y)$-Nullumgebung, so ist z.z. dass es eine Umgebung W von t gibt, sodass $f(W) \subset f(t) + U$.
Sei $U := \{x\colon |\langle x, y_i\rangle| \le \epsilon\}$, dann ist $y_i \circ f$ stetig nach Voraussetzung. Daraus folgt

$$\exists W_i \text{ Umgebung von } t\colon |\langle f(t) - f(s), y_i\rangle| \le \epsilon \quad \forall s \in W_i$$

$W := \bigcap W_i$ ist offen in T und leistet das Gewünschte. □

2. Bipolarensatz

DEFINITION 4.8. Sei (X,Y) ein duales Paar, $A \subset X$ und $B \subset Y$.

(a) Die Polare von A ist

$$A^\circ = \{y \in Y\ :\ \langle x, y\rangle \le 1, \text{ für alle } x \in A\}$$

(b) Die Polare von B ist

$$A^\circ = \{x \in X\ :\ \langle x, y\rangle \le 1, \text{ für alle } y \in B\}$$

LEMMA 4.9. *Sei (X,Y) ein duales Paar, und seien $A, A_i \subset X$, $i \in I$, dann gilt:*

(a) A° *ist konvex und* $\sigma(Y,X)$*–abgeschlossen,* $A^\circ = (\overline{\mathrm{co}}\, A)^\circ$.

(b) $0 \in A^\circ$, $A \subset A^{\circ\circ}$ *und wann immer* $A_1 \subset A_2$ *folgt* $A_2^\circ \subset A_1^\circ$.

(c) Ist A kreisförmig, so ist es auch A°.

(d) $(\lambda \cdot A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$, $\lambda > 0$.

(e) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap A_i^\circ$.

(f) $(\bigcap A_i)^\circ \supset \overline{\mathrm{co}}(\bigcup A_i^\circ)$.

Beweis. (b)-(e) können durch einfaches Nachrechnen bewiesen werden.
(a): Wir setzen $\ell_x(y) := \langle x, y\rangle$

$$A^\circ = \bigcap_{x\in A}\{y \in Y : \langle x, y\rangle \le 1\} = \bigcap_{x\in A}\{y \in Y : \ell_x(y) \text{ stetig}\}.$$

Die letzte Menge ist abgeschlossen, da $\ell_x(y)$ stetig. Da weiters der beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, gilt dass A° abgeschlossen ist. Seien weiters $y, \bar y \in A^\circ$. Mit der Bilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ folgt:

$$t \in [0, 1] : \quad \langle ty + (1 - t)\bar y, x\rangle \le 1,$$

also A° ist konvex. Schlussendlich zeigen wir noch, dass $A^\circ = (\overline{\text{co}}(A))^\circ$:

$$\begin{aligned} A^\circ &= \{y \in Y : \langle x, y\rangle \le 1 \ \ \forall x \in A\} = \\ &= \{y \in Y : \langle x, y\rangle \le 1 \ \ \forall x \in \text{co}(A)\} = \\ &= \{y \in Y : \langle x, y\rangle \le 1 \ \ \forall x \in \overline{\text{co}}(A)\} = \\ &= (\overline{\text{co}}(A))^\circ. \end{aligned}$$

(f) $A = \bigcap A_i \ \Rightarrow\ A \subset A_i\ \forall i$. Daraus folgt mit (b):

$$\begin{aligned} &\overset{(b)}{\Rightarrow} A_i^\circ \subset A^\circ \Rightarrow \bigcup A_i^\circ \subset A^\circ \\ &\qquad\qquad \overset{(a)}{\Rightarrow} \overline{\text{co}}(\bigcup A_i^\circ) \subset A^\circ. \end{aligned}$$

□

Satz 4.10 (Bipolarensatz). *Für ein duales Paar (X, Y) und $A \subset X$ gilt*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\text{co}}(A \cup \{0\}),$$

wobei der Abschluß bezüglich $\sigma(X, Y)$ ist.

Beweis. Da $A \subset A^{\circ\circ}$, $0 \in A^\circ$ (und daher auch in $A^{\circ\circ}$) und $A^{\circ\circ}$ konvex und abgeschlossen, gilt $\overline{\text{co}}(A \cup \{0\}) \subset A^{\circ\circ}$.
Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $\overline{\text{co}}(A \cup \{0\}) \subsetneq A^{\circ\circ}$, also

$$\exists x_0 \in A^{\circ\circ} \notin \overline{\text{co}}(A \cup \{0\}) =: V.$$

Wir wählen wieder mit dem Satz von Hahn-Banach ein lineares Funktional, das V und x_0 echt trennt:

$$\exists x^* \in X^* \ \sigma(X, Y)\text{-stetig} : x^*(x_0) > 1 \ge x^*(x) \quad \forall x \in V.$$

Wir wissen: x^* ist stetig bezüglich $\sigma(X, Y) \ \Leftrightarrow\ \exists y \in Y : x^* = \langle\cdot, y\rangle$. So ein y wählen wir. Also

$$\langle x_0, y\rangle > 1 \ge \langle x, y\rangle \ \forall x \in V$$

Also $\langle x, y\rangle \le 1$ $(\forall x \in A)$ $\Rightarrow$ $y \in A^\circ$ und $\langle x_0, y\rangle > 1$ $\Rightarrow$ $x_0 \notin A^{\circ\circ}$, das ist ein Widerspruch. □

Korollar 4.11. *Sei (X, Y) ein duales Paar und $C \subset X$ konvex mit $0 \in C$. C ist genau dann $\sigma(X, Y)$, abgeschlossen wenn es ein $B \subset Y$ gibt sodaß $C = B^\circ$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ $B := C^\circ \Rightarrow C^{\circ\circ} = B^\circ = \overline{\text{co}}(C \cup \{0\}) = \bar C = C$.
„$\Leftarrow$“ $\exists B \subset Y : C = B^\circ \ \Rightarrow\ C$ ist abgeschlossen. □

3. Der Satz von Banach–Alaoglu–Bourbaki

SATZ 4.12 (Satz von Banach–Alaoglu–Bourbaki). *Sei U eine Nullumgebung des lokalkonvexen Raumes X. Dann ist U° bezüglich $\sigma(X^*, X)$ kompakt.*

BEWEIS. Zunächst zwei Vorbetrachtungen: $\sigma(X^*, X)$ ist die Topologie der punktweisen Konvergenz auf X:

$$\begin{aligned} \Phi\colon (X^*, \sigma(X^*, X)) &\to (\mathbb{R}^X, \mathcal{T}_p) \\ x^* &\mapsto x^*, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{T}_p$ die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^X$ bezeichne. Offensichtlich ist Φ injektiv. Außerdem ist Φ eine homöomorphe Einbettung von X^* in $\mathbb{R}^X$ (d. h. Φ und Φ^{-1} sind stetig).
Wir stellen außerdem fest, dass es für $U \subset X$ Nullumgebung ein $V \subset U$ gibt, sodass V absolutkonvex ist und außerdem daraus folgt, dass $U^\circ \subset V^\circ$ und schließlich gilt: wenn V° kompakt ist, ist auch U° kompakt. OBdA. können wir also U absolutkonvex annehmen.
Wir zeigen nun: $\Phi(U^\circ)$ kompakt bezüglich $\mathcal{T}_p$:
Sei $x \in X$. Da U absorbierend und absolutkonvex gilt

$$\exists \lambda_x > 0\colon x \in \lambda_x U \text{ und } |\langle x^*, x\rangle| \le \lambda_x \quad \forall x^* \in U^\circ.$$

Außerdem ist $K_x := \{\lambda \in \mathbb{R}\colon |\lambda| \le \lambda_x\}$ kompakt in $\mathbb{R}$. Weiters ist dann mit dem Satz von Tichonow $\prod_{x\in X} K_x$ kompakt bzgl. der Produkttopologie $\mathcal{T}_p$. Sei nun

$$K := \prod_{x\in X} K_x = \{f \in \mathbb{R}^X\colon f(x) \in K_x \ \forall x \in X\}.$$

Dann gilt:

$$\Phi(U^\circ) \subset K \qquad \text{da } \forall x^* \in U^\circ\colon |x^*(x)| \le \lambda_x.$$

Könnten wir nun zeigen, dass $\Phi(U^\circ)$ abgeschlossen ist, wäre $\Phi(U^\circ)$ auch kompakt. Und daraus könnten wir dann folgern, da Φ ein Homöomorphismus ist, dass auch U° kompakt ist.
Dazu sei $f \in K$ im Abschluss von $\Phi(U^\circ)$. Der punktweise Limes eines Netzes (x_i^*) ist mit x_i^* linear selbst linear. Somit ist auch f linear.

$$\forall x \in U\colon \lambda_x = 1 \;\Rightarrow\; f(U) \subset \{\lambda\colon |\lambda| \le 1\}$$

Da f linear ist, ist f sogar stetig. Somit ist $f \in \Phi(X^*)$. Ist U° abgeschlossen in X^* gilt $\Phi(U^\circ)$ abgeschlossen in $\Phi(X^*)$.
Also:

$$\begin{aligned} &f \in \Phi(X^*) \\ &\Phi(U^\circ) \text{ abgeschlossen in } \Phi(X^*) \\ &f \in K \text{ im } \mathcal{T}_p\text{-Abschluss von } \Phi(U^\circ) \\ &\overset{\text{siehe oben}}{\Rightarrow} U^\circ \text{ kompakt.} \end{aligned}$$

□

SATZ 4.13 (Satz von (Banach)–Alaoglu). *Sei X ein normierter Raum, so ist*

$$B_{X^*} = \left\{x^* \in X^* : \|x^*\| \le 1\right\}$$

kompakt in der schwach*–Topologie $\sigma(X^*, X)$.

Literaturverzeichnis

[Wer11] Dirk Werner. *Functional analysis. (Funktionalanalysis.) 7th revised and expanded ed.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. xiii, 552 p. EUR 36.95; SFR 46.00 , 2011.