SKRIPTUM – LINEARE ALGEBRA I

J.B. COOPER

Inhaltsverzeichnis:

§ 1 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

In diesem Paragraph beginnen wir mit einer elementaren Behandlung linearer Gleichungssysteme. Bevor wir versuchen eine allgemeine Theorie solcher Systeme herzuleiten, rechnen wir ein konkretes Beispiel durch:

Betrachten wir das System:

$$\begin{array}{rlr} 2x - y \phantom{{}+z} &= 3 & A \\ 4x - 5y + z &= 7 & B \\ 2x - y - 3z &= 5 & C \end{array}$$

$B \to B - 2A$, $C \to C - A$ liefert das System

$$\begin{array}{rl} 2x - y \phantom{{}+z} &= 3 \\ -3y + z &= 1 \\ -3z &= 2 \end{array}$$

Daher

$$\begin{aligned} z &= -\frac{2}{3} \\ y &= -\frac{1}{3}(1-z) = -\frac{1}{3}.\frac{5}{3} = -\frac{5}{9} \\ x &= \frac{1}{2}(3+y) = \Big(\frac{1}{2}\Big).\Big(3 - \frac{5}{9}\Big) = \frac{11}{9} \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt ein allgemeines System:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = y_1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = y_n \end{array}$$

(Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß die Zahl der Gleichungen und die Zahl der Unbekannten gleich sind.)

Die Lösungsmethode ist folgende: man substrahiert geeignete Vielfache der ersten Gleichung von den anderen, sodaß der Koeffizient von x_1 dort verschwindet. Das liefert ein System der Gestalt

$$\begin{array}{cccccc} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + \cdots + & b_{1n}x_n & = z_1 \\ & & b_{22}x_2 & + \cdots + & b_{2n}x_n & = z_2 \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & b_{n2}x_2 & + \cdots + & b_{nn}x_n & = z_n \end{array}$$

Jetzt wenden wir die gleiche Methode auf die letzten $(n-1)$ Gleichungen an usw. Am Schluß bekommen wir ein System der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc} d_{11}x_1 & + & d_{12}x_2 & + \cdots + & d_{1n}x_n & = & w_1 \\ & & d_{22}x_2 & + \cdots + & d_{2n}x_n & = & w_2 \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & d_{nn}x_n & = & w_n \end{array}$$

Dieses System läßt sich trivialerweise lösen.

Allerdings ist die Situation im allgemeinen etwas komplizierter. Wir nennen den Koeffizient von x_i in der i-ten Gleichung nach Schritt $(i-1)$ das i-te **Pivotelement.** Wir sehen, daß unsere Methode immer eine eindeutige Lösung liefert, wenn das i-te Pivotelement ungleich null ist. Wenn das nicht der Fall ist, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

Fall 1: Das i-te Pivotelement ist null, aber es gibt ein $j > i$ mit $a_{ji} \neq 0$. Dann vertauschen wir einfach die i-te und j-te Gleichung.

Beispiel:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrl}
 & x & + & y & + & z & + & w & = & -2 & & (1) \\
 & 3x & + & 3y & - & z & + & 2w & = & 6 & & (2) \\
 & x & - & y & + & 3z & + & 6w & = & -1 & & (3) \\
 & x & + & y & + & z & + & w & = & -2 & & (4) \\
 & & & & - & 4z & - & w & = & 12 & & (5) \\
(2)-3(1) & & - & 2y & + & 2z & + & 5w & = & 1 & & (6) \\
(3)-(1) & x & + & y & + & z & + & w & = & -2 & & (7) \\
(5) \rightleftharpoons (6) & & - & 2y & + & 2z & + & 5w & = & 1 & & (8) \\
 & & & & & 4z & + & 5w & = & 1 & & (9)
\end{array}
$$

Fall 2: $a_{ji} = 0$ für alle $j \geq i$. In diesem Fall, ist das Gleichungssystem nicht immer lösbar.

Beispiel: Betrachte die Gleichung:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 3y & + & 2z & = & y_1 \\
2x & + & 6y & + & 9z & = & y_2 \\
3x & + & 9y & + & 8z & = & y_3
\end{array}
$$

Unsere Methode führt zum System

$$
\begin{array}{rcrcrclcl}
x & + & 3y & + & 2z & = & y_1 & & \\
 & & & & 5z & = & y_2 & - & 2y_1 \\
 & & & & 2z & = & y_3 & - & 3y_1
\end{array}
$$

Diese Gleichung ist genau dann lösbar, wenn

$$5(y_3 - 3y_1) = 2(y_2 - 2y_1).$$

Später werden wir eine genaue Theorie der Lösbarkeit von solchen Systemen herleiten. Zunächst aber entwicklen wir eine sehr nützliche Technik, um dieses Problem zu behandeln – den Matrizenformalismus.

Der Matrizenformalismus: Kehren wir zurück zu einem konkreten Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & y & & & = & -2 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 7 \end{array}$$

Die enthaltenen Informationen lassen sich auf folgende zwei Zahlenschemata reduzieren:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Das allgemeine Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array}$$

reduziert sich analog auf die Schemata:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Ein solches Schema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nennen wir eine $m \times n$ **Matrix.** m bezeichnet die Anzahl der **Zeilen,** n die Anzahl der **Spalten.** Konsequenterweise ist

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

eine $m \times 1$ Matrix.

Um Platz zu sparen, schreiben wir eine solche Matrix kurz als $[a_{ij}]_{i=1,}^{m}{}_{j=1}^{n}$ oder einfach $[a_{ij}]$.

Wir können die i-te Zeile bzw. die j-te Spalte dieser Matrix als $1 \times n$ bzw. $m \times 1$-Matrix betrachten, d.h. die i-te Zeile von $[a_{ij}]$ ist die Matrix $[a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in}]$ und die j-te Spalte ist

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -6 & 10 \\ 3 & 4 & -1 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

ist eine 3×5 Matrix. Die zweite Zeile ist $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & 10 \end{bmatrix}$, die dritte Spalte

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Wir benutzen oft folgende Schreibweise: Sei A eine $m \times n$ Matrix, A_j die j-te Spalte von A d.h.

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Dann bezeichnen wir A mit $[A_1 \dots A_n]$.

Ähnlicherweise schreiben wir

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

wobei $B_i = [b_{i1} \dots b_{in}]$ die i-te Zeile von B ist.

Besonders wichtige Matrizen sind:

1) Die $m \times n$ Nullmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(entspricht der Gleichung:

$$\begin{array}{ccccccc} 0.x_1 & + & 0.x_2 & + \cdots + & 0.x_n & = b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0.x_1 & + & 0.x_2 & + \cdots + & 0.x_n & = b_n \end{array}$$

Diese Gleichung hat nur dann eine Lösung, wenn alle Zahlen auf der rechten Seite null sind. Dann ist **jedes** n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ eine Lösung.) Wir schreiben $0_{m,n}$ (oder einfach 0) für diese Matrix.

2) Die $n \times n$ Einheitsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(d.h. $a_{ij} = 1$ falls $i = j$, $a_{ij} = 0$ falls $i \neq j$)

Wir schreiben I_n (oder einfach I) für diese Matrix. Sie entspricht der Gleichung

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & y_1 \\ & x_2 & & & = & y_2 \\ & & \vdots & & & \vdots \\ & & & x_n & = & y_n, \end{array}$$

die immer eine eindeutige Lösung besitzt.

Später werden Matrizen folgender speziellen Art eine wichtige Rolle spielen:

1) Diagonalmatrizen: d.h. Matrizen der Gestalt:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0\dots & 0 & \end{bmatrix}$$

entsprechend dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 x_1 & \dots & = y_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & \lambda_n x_n & = y_n. \end{array}$$

Wir bezeichnen diese Matrix mit $\mathrm{diag}\,[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

2) Dreieckmatrizen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

d.h. Matrizen mit der Eigenschaft $a_{ij} = 0$, falls $i > j$.

Kehren wir zu unseren theoretischen Überlegungen zurück. Wir schreiben jetzt unser allgemeines Gleichungssystem in der Form

$$AX = Y,$$

wobei $A = [a_{ij}]_{i=1,}^{m}{}_{j=1}^{n}$ und

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Bis hierher ist dies nicht mehr als eine Vereinfachung der Schreibweise. Durch Einführung einer Matrizenmultiplikation können wir allerdings diesem Formalismus eine arithmetische Interpretation geben. Zunächst ist folgende Vereinbarung einleuchtend. Wir **addieren** zwei $m \times n$ Matrizen A und B, indem wir einfach die entsprechenden Elemente addieren. Symbolisch:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}]$$

Wir schreiben $A + B$ für das Ergebnis.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & -11 \\ 8 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Wir können nur Matrizen mit gleicher Zeilenzahl und gleicher Spaltenzahl addieren. Die Summe etwa von einer 3×1 Matrix und einer 2×1 Matrix wird nicht definiert.

Die Matrizenaddition besitzt viele Eigenschaften, die an Eigenschaften der Addition in $\mathbf{R}$ erinnern, z.B.:
1) $A + B = B + A$ (Kommutativität)
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Assoziativität)
3) $A + 0 = 0 + A = A$
4) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ wobei $-A$ die Matrix $[-a_{ij}]$ ist.

Beweis: 1) Seien $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] &= [a_{ij} + b_{ij}] \quad \text{(Definition von Addition)} \\ &= [b_{ij} + a_{ij}] \quad \text{(Kommutativität der Addition in } \mathbf{R}) \\ &= [b_{ij}] + [a_{ij}] \\ &= B + A \end{aligned}$$

Eine andere Operation, die später wertvoll sein wird, ist die Skalarmultiplikation, d.h. die Multiplikation von jedem Element von A mit einem $\lambda \in \mathbf{R}$.
Wir bezeichnen diese Matrix mit λA. D.h. $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$
z.B.

$$3 \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 3 \\ 6 & -21 & 3 \end{bmatrix}.$$

Es gelten dann folgende Eigenschaften:
1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
2) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
3) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
4) $1.A = A$.

Beweis: 1) Falls $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\lambda(A+B) &= \lambda\big([a_{ij}] + [b_{ij}]\big) = \lambda\big([a_{ij} + b_{ij}]\big) = \big[\lambda(a_{ij} + b_{ij})\big] \\ &= [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] = \lambda A + \lambda B.\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Matrizenmultiplikation. Hier ist die Definition nicht ganz so offensichtlich. Schreiben wir unser System in der Gestalt

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

so ist es naheliegend, das Produkt von der $m \times n$ Matrix A und der $n \times 1$ Matrix X folgendermaßen zu definieren:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\dots+ & a_{1n}x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & +\dots+ & a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Sei B eine $n \times p$ Matrix der speziellen Gestalt

$$\begin{bmatrix} & b_{1k} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & b_{nk} & \end{bmatrix}$$

Es ist naheliegend, AB als

$$\begin{bmatrix} & a_{11}b_{1k} & + & a_{12}b_{2k} & +\dots & +a_{1n}b_{nk} & \\ 0 & & & \vdots & & & 0 \\ & a_{m1}b_{1k} & + & & & +a_{mn}b_{nk} & \end{bmatrix}$$

zu definieren, (die nicht-verschwindende Spalte ist die k-te).

Nehmen wir an, daß die Multiplikation distributiv über der Addition ist, dann können wir folgendermaßen rechnen.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_{11} & \\ \vdots & 0 \\ b_{n1} & \end{bmatrix} \right.$$

$$+\cdots+\quad \left.\begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} b_{1p} \\ \\ b_{np} \end{matrix} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & +\cdots+ & a_{1n}b_{n1} & \ldots & a_{11}b_{1p} & +\cdots+ & a_{1n}b_{np} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1}b_{11} & +\cdots+ & a_{mn}b_{n1} & & a_{m1}b_{1p} & +\cdots+ & a_{mn}b_{np} \end{bmatrix}.$$

Diese Überlegungen führen zu folgender

Definition: Sei $A = [a_{ij}]$ eine $m \times n$ Matrix, $B = [b_{jk}]$ eine $n \times p$ Matrix. Dann ist AB die $m \times p$ Matrix $[c_{ik}]$, wobei $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 6 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 24 \\ 36 & 38 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Das Produkt AB ist nur dann definiert, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist. Z.B. Ausdrücke wie

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

sind sinnlos. Insbesondere ist der Ausdruck $A \cdot A$ (kurz A^2) nur dann sinnvoll, wenn A **quadratisch** ist, d.h. $m = n$.

Wir sammeln jetzt einige einfache Eigenschaften der Multiplikation:

I. Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ: $(AB)C = A(BC)$.

Beweis: Seien $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$, $C = [c_{kl}]$.

$$(A\, m \times n, B\, n \times p, C\, p \times q)$$

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right]_{i,k}, \quad (AB)C = \left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}\right]_{i,l}$$

$$BC = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right]_{j,k}, \quad A(BC) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right)\right]_{i,l}$$

Das Ergebnis folgt dann aus folgender Tatsache: Falls $(d_{j,k})_{j=1}^{n}{}_{,k=1}^{p}$ eine Doppelfolge ist, gilt

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} d_{jk}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{jk}\right)$$

(setze $d_{jk} = a_{ij}b_{jk}c_{kl} - i$ und l fest).

II. Die Matrizenmultiplikation ist distributiv:

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)D = BD + CD$$

Beweis: Das (i,k)-te Element von
a) $A(B+C)$ ist $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$
b) $AB + AC$ ist $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$.

III. Die Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen nicht kommutativ: Denn sei A eine $m \times n$ Matrix, B $n \times p$ (damit AB definiert ist). Es gibt drei Möglichkeiten:
A) $p \neq m$: Dann ist BA nicht einmal definiert.
B) $p = m$ aber $m \neq n$: Dann ist AB eine $m \times n$ Matrix, BA eine $n \times m$ Matrix. Also gilt sicher $AB \neq BA$.
C) $m = n = p$: Auch im diesen Fall gilt i.a.: $AB \neq BA$.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

IV. I ist ein Einselement für die Multiplikation, genauer

$$A \cdot I_n = A$$
$$I_m \cdot A = A$$

(A eine $m \times n$ Matrix.)

Inverse einer Matrix: Eine Matrix B wird als **Inverse** einer $n \times n$ Matrix A bezeichnet, wenn $AB = BA = I_n$. Eine Matrix A hat höchstens **eine** Inverse. Existieren nämlich B, C mit $AB = BA = AC = CA = I_n$, dann gilt

$$B = B \cdot I = B(AC) = (BA)C = I \cdot C = C.$$

Falls eine Inverse existiert, so heißt A **invertierbar** und die Inverse wird mit A^{-1} bezeichnet.

Bemerkung: Es hat keinen Sinn, über eine Inverse einer $m \times n$ Matrix A ($m \neq n$) zu reden. Allerdings kann A eine **Rechtsinverse** besitzen (d.h. eine $n \times m$ Matrix B, sodaß $AB = I_m$) oder eine **Linksinverse** (eine $n \times m$ Matrix C, sodaß $CA = I_m$) (nicht aber beides). In der Tat, eine Matrix A hat eine Rechtsinverse genau dann, wenn die Gleichungssysteme $AX = E_k$ alle lösbar sind ($k = 1, \ldots, n$), wobei E_k die $m \times 1$ Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ist (d.h. die k-te Spalte von I_m).

Satz: Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) A besitzt eine Rechtsinverse.
2) Für jedes k hat die Gleichung $AX = E_k$ eine Lösung.
3) Für jede $n \times 1$ Matrix Y hat die Gleichung $AX = Y$ eine Lösung.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Äquivalenz von 2) und 3). Klarerweise gilt 2), wenn 3) gilt. Anderseits nehmen wir an, daß X_k eine Lösung von $AX = E_k$ ist. Dann ist $y_1 X_1 + \cdots + y_n X_n$ eine Lösung von $AX = Y$, wobei

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Jetzt zeigen wir, daß 1) und 2) äquivalent sind. Falls B eine Rechtsinverse von A ist, dann ist $X = BE_k$ eine Lösung von $AX = E_k$. Denn es gilt:

$$A(BE_k) = (AB)E_k = I_n E_k = E_k.$$

Sei anderseits B_k eine Lösung der Gleichung $AX = E_k$. Dann ist $B = [B_1 \ldots B_n]$ eine Rechtsinverse für A.

Später werden wir sehen, daß A in diesem Fall invertierbar ist.

Beispiel: Die Diagonalmatrix

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$$

ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \neq 0$ und ihre Inverse ist

$$\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, l_n^{-1})$$

Polynome und Matrizen:

Sei A eine $n \times n$ Matrix. Wir wissen jetzt, wie wir $A^2 (= A \cdot A)$ definieren können. Analog definiert man A^3, A^4 – sogar A^k.
Sei p das Polynom,

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_k\lambda^k$$

Dann definieren wir $p(A)$ als

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_k A^k$$

Bemerkung: Im allgemeinen müssen Matrizen nicht kommutieren. Trotzdem gilt immer $p_1(A)p_2(A) = p_2(A)p_1(A) = p(A)$ (p_1, p_2 Polynome wobei $p = p_1 p_2$).
Denn sei

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m \\ p_2(\lambda) &= b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_n\lambda^n. \end{aligned}$$

Dann ist $p_1 p_2(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m+n} \quad \lambda^{m+n}$ wobei

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ &\vdots \\ c_k &= a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_0 b_k. \end{aligned}$$

Daher ist $p(A) = c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{m+n} \quad A^{m+n}$.

Anderseits gilt:

$$\begin{aligned} p_1(A)p_2(A) &= (a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m)(b_0 I + \cdots + b_n A^n) \\ &= c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{m+n} A^{m+n} \\ &= p(A). \end{aligned}$$

Insbesonders gilt:

$$p(A) = (A - \lambda_1 I_n) \ldots (A - \lambda_k I_n)$$

falls p die lineare Faktorisierung

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_k)$$

besitzt.

Beispiele: I. Sei $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$. Dann gilt: $p(A) = \operatorname{diag}(p(\lambda_1)), \ldots, p(\lambda_n)).$ ∎

II. Für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad p(\lambda) = a_1 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$$

gilt

$$p(A) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & a_1 \\ 0 & & & a_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p(0) & p'(0) & \dots & \frac{p^{(n)}(o)}{n!} \\ \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & p'(0) \\ 0 & & & p(0) \end{bmatrix}$$

Transponierte Matrizen: Eine andere Operation auf Matrizen, die für uns später wichtig sein wird, ist die Transponierung. Sei $A = [a_{ij}]$ eine $m \times n$ Matrix. Die $n \times m$ Matrix $[b_{ij}]$ – wobei $b_{ij} = a_{ji}$ – heißt **die zu A transponierte Matrix,** geschrieben A^t. (D.h. die Spalten von A sind die Zeilen von A^t und umgekehrt.) Z.B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Einige einfache Eigenschaften:
1) $(\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t$,
2) $(AB)^t = B^t A^t$.
3) A ist genau dann invertierbar, wenn A^t es ist und es gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Nun kehren wir zu unserem allgemeinen Gleichungssystem zurück. Wir können die Lösungsmethode wie folgt als Algorithmus hinschreiben.

Schritt i:
Fall 1) Das i-te Pivotelement a_{ii} ist ungleich null. Dann dividiere die i-te Gleichung durch a_{ii} und substrahiere das a_{ji}-te Vielfache von der j-ten Gleichung ($j = i + 1, \dots, m$).

Fall 2) Das i-te Pivotelement a_{ii} ist null, aber es gibt ein a_{ji} mit ($j > i$) und $a_{ji} \neq 0$. Dann vertauschen wir die i-te und j-te Gleichung.

Fall 3) $a_{ji} = 0$ (für $j \geq i$). Dann suchen wir das a_{jl} ($j, l \geq i$) mit kleinstem l sodaß $a_{jl} \neq 0$. Wir multiplizieren die j-te Zeile mit a_{jl}^{-1}, vertauschen die i-te und

j-te Zeile und fahren fort wie im Fall 1).
Am Ende dieses Algorithmus bekommen wir eine Gleichung mit der Matrix der Gestalt:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{1,j_1+1} & \dots & & & & & & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \tilde{a}_{2,j_2+1} & & & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{r,j_r+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

mit $j_1 < j_2 < \dots$. Das entsprechende System läßt sich trivialerweise lösen (siehe unten). Dieser Algorithmus heißt **Gauß'sche Eliminierungsmethode.**

Im soeben beschriebenen Algorithmus haben wir folgende sogenannte **elementare Zeilenumformungen** benützt.

I. Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + \lambda A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

II. Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

III. Multiplikation der i-ten Zeile mit λ ($\neq 0$).

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Man sieht leicht, daß diese Umformungen mit Hilfe der Matrizenmultiplikation erreicht werden können:

I. Links-Multiplikation mit der Matrix $P_{ij}^{\lambda} = [a_{kl}]$ wobei

$$a_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = l \\ \lambda, & \text{falls } k = i, l = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

II. Links-Multiplikation mit $U_{i,j}$ d.h. die Matrix $[a_{kl}]$ wobei

$$a_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = l \neq i \text{ oder } j \\ 1, & \text{falls } k = i, l = j \text{ oder } k = j, l = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

III. Links-Multiplikation mit M_i^{λ} d.h. die Matrix $[a_{kl}]$ wobei

$$a_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \neq i \\ \lambda & \text{falls } k = l = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir bemerken, daß diese Matrizen invertierbar sind, und es gilt:

$$\begin{aligned} (P_{ij}^{\lambda})^{-1} &= P_{ij}^{-\lambda} \\ (U_{i,j})^{-1} &= U_{i,j} \\ (M_i^{\lambda})^{-1} &= M_i^{\frac{1}{\lambda}} \end{aligned}$$

Nach diesen Überlegungen können wir die Wirkung unseres Algorithmus folgendermaßen formulieren:

Satz: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann gibt es eine invertierbare Matrix B, sodaß $\tilde{A} = BA$ die folgende Gestalt hat:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & \tilde{a}_{1,j_1+1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \tilde{a}_{2,j_2+1} & & & & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 & & \ldots & 1 & \tilde{a}_{r,j_r+1} & \ldots & \tilde{a}_{rn} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

B ist ein Produkt von Elementarmatrizen. $\tilde{A}$ heißt **die Hermitesche Normalform** von A (eigentlich **eine** Hermitsche Normalforn, da $\tilde{A}$ nicht eindeutig bestimmt ist).

Jetzt sehen wir, daß X genau dann eine Lösung von $AX = Y$ ist, wenn X eine Lösung von $\tilde{A}X = Z$ ist $(Z = BY)$. Diese Gleichung ist nur dann lösbar, wenn $z_k = 0\,(k > r)$. Die Lösung konstruiert man wie folgt: Man wähle

$$\begin{array}{rll}
x_{j_r+1}\dots x_n & \text{willkürlich und setze} & x_{j_r} = z_r - \displaystyle\sum_{j=j_r+1}^{n} \tilde{a}_{r,j}x_j \\
x_{j_{r-1}+1},\dots,x_{j_r-1} & \text{willkürlich und setze} & x_{j_{r-1}} = z_{r-1} - \displaystyle\sum_{j=j_{r-1}+1}^{n} \tilde{a}_{r-1,j}x_j \\
 & \vdots & \\
x_{j_1+1},\dots,x_{j_2-1} & \text{willkürlich und setze} & x_{j_1} = z_1 - \displaystyle\sum_{j=j_1+1}^{n} \tilde{a}_{1j}x_j \\
x_1,\dots,x_{j_1-1} & \text{willkürlich} &
\end{array}$$

Daraus kann man folgende Aussagen gewinnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Hermitescher Form

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{1,j_1+1} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \tilde{a}_{1n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \tilde{a}_{2,j_2+1} & & & \tilde{a}_{2n} \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \dots\dots\dots & & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{r,j_r+1} & \dots & & \tilde{a}_{rn} \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix}$$

Dann gilt:
a) Die Gleichung $AX = Y$ ist immer lösbar $\Leftrightarrow r = m$;
b) Die Gleichung $AX = 0$ hat nur die triviale Lösung $\Leftrightarrow r = n$. Dann sind die Lösungen von $AX = Y$ (falls existent) eindeutig.

Falls A eine quadratische Matrix ist, dann stimmen diese beiden Bedingungen ($r = m$ und $r = n$) überein. Daraus folgt der Satz:

Satz: Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
a) Die Gleichung $AX = Y$ hat immer eine Lösung;
b) Die homogene Gleichung $AX = 0$ hat nur die triviale Lösung;
c) Die Lösung zu $AX = Y$, falls existent, ist eindeutig.

Satz: Sei A eine $m \times n$ Matrix mit $m < n$. Dann hat die Gleichung $AX = 0$ eine nicht triviale Lösung (d.h. eine Lösung X mit $X \neq 0$.)

Beweis: In diesem Fall enthält die hermitesche Form eine Spalte ohne ein Pivoteins.

Es ist oft wichtig, eine Matrix B zu bestimmen, sodaß BA Hermitesche Normalform hat. Das kann man folgendermaßen erreichen. Man führt die Gauß'sche Eliminierungsmethode durch und notiert beim i-ten Schritt die Matrix B_i, die der entsprechenden Operation zugeordnet ist. Die gesuchte Matrix B ist dann

$$B_k \cdots B_2 B_1.$$

In der Praxis macht man folgendes. Man erweitert A zu der $m \times (m+n)$ Matrix $\overline{A} = [A, I_m]$ d.h.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & & \dots & & 1 \end{bmatrix}$$

Wenn man die Zeilenoperationen, die A auf Hermitesche Normalform reduzieren, auf $\overline{A}$ anwendet, dann steht die Matrix B am Ende im rechten $n \times n$ Block.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Die erweiterte Matrix ist:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir bekommen suksessiv die Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

d.h.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Auf ähnliche Weise bekommen wir einen Algorithmus zur Berechnung der Inversen einer $n \times n$ Matrix.

Beispiel: Betrachte die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir führen schematisch die **Gauss-Jordan'sche Methode** durch.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ergebnis:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Da diese Methode genau dann erfolgreich ist, wenn die Hermitesche Form von A die Gestalt

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

hat und dies äquivalent zu der Tatsache ist, daß A eine Rechts-Inverse hat, so sehen wir, daß folgendes gilt:

Satz: Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) A hat eine Inverse B;
2) A hat eine Linksinverse;
3) A hat eine Rechtsinverse.

Falls 2) oder 3) gilt, dann ist eine Links- (bzw. Rechts-) inverse auch eine Inverse (und daher eindeutig bestimmt.)

Korollar: Seien A, B $n \times n$ Matrizen, sodaß AB invertierbar ist, dann sind A und B invertierbar und

$$A^{-1} = B(AB)^{-1}$$
$$B^{-1} = (AB)^{-1}A$$

Beweis: $A(B(AB)^{-1}) = (AB)(AB)^{-1} = I_n$ d.h. $B(AB)^{-1}$ ist Rechtsinverse von A.

Wir kehren zurück zum Gleichungssystem:

$$AX = Y.$$

Es ist naheliegend, die Zuordnung

$$f_A : X \to AX$$

als Abbildung von der Menge der $n \times 1$ Matrizen in die Menge der $m \times 1$ Matrizen zu betrachten. Zunächst machen wir einige kleine Bemerkungen.

Die Abbildung f_A ist **additiv,** d.h. $f_A(X_1 + X_2) = f_A(X_1) + f_A(X_2)$ und $f_A(\lambda X) = \lambda f_A(X)$.

Diese zwei Eigenschaften können wir zusammenfassen in der Gleichung

$$f_A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 f_A(X_1) + \lambda_2 f_A(X_2)$$

Noch allgemeiner sieht man, daß

$$f_A(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r) = \lambda_1 f_A(X_1) + \cdots + \lambda_r f_A(X_r).$$

Wir führen daher folgende Bezeichnungen ein:
Spaltenmatrizen (d.h. $p \times 1$ Matrizen für irgendein p) nennen wir p-**Vektoren.** Falls $X_1, \ldots, X_r$ p-Vektoren sind und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ Skalare, nennen wir einen Vektor der Gestalt $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r$ eine **lineare Kombination** der Vektoren $X_1, \ldots, X_r$. Eine Abbildung f auf der Menge aller p-Vektoren heißt **linear**, falls

$$f(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r) = \lambda_1 f(X_1) + \cdots + \lambda_r f(X_r)$$

Später werden wir eine geometrische Interpretation kennenlernen, die diese momentan eher seltsamen Bezeichnungen rechtfertigen wird.

Wir können jetzt einige Aussagen über Gleichungssysteme in diese Sprache übersetzen.

1) Das System $AX = Y$ hat genau dann eine Lösung, wenn Y eine lineare Kombination der Spalten von A ist;
2) Ist X_0 eine Lösung von $AX = Y$, dann hat jede Lösung die Gestalt $X_0 + X_1$ wobei X_1 eine Lösung von $AX = 0$ ist.

Jetzt beschäftigen wir uns mit der Frage der Eindeutigkeit der Lösung. Betrachten wir die homogene Gleichung $AX = 0$, so kommen wir auf folgenden Begriff:
Die Vektoren $X_1, \ldots, X_r$ sind genau dann **linear unabhängig,** wenn aus der Beziehung $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r = 0$ folgt, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ (d.h. nur die triviale Linearkombination verschwindet).

Satz: Eine Lösung der Gleichung $AX = Y$ ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn die Spaltenvektoren $A_1, \ldots, A_n$ linear unabhängig sind.

Definition: Sei A eine Matrix. Wir definieren: Der **Spaltenrang** von A ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von A. Ähnlicherweise können wir den Zeilenrang definieren als die Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilen von A.

Um den Spaltenrang zu bestimmen, können wir etwa folgendermaßen vorgehen: Wir untersuchen die Spalten $A_1, \ldots, A_n$ von A bis wir ein A_i finden, das von $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots,$
A_n linear abhängig ist (finden wir kein solches A_i, dann ist der Spaltenrang n). Jetzt betrachten wir die Matrix

$$\tilde{A} = [A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n]$$

A uns $\tilde{A}$ haben den gleichen Spaltenrang. Wir setzen diesen Prozeß fort, bis wir eine Matrix $\tilde{\tilde{A}}$ bekommen, deren Spalten linear unabhängig sind. Weniger offensichtlich ist die Tatsache, daß A und $\tilde{A}$ (und daher A und $\tilde{\tilde{A}}$) den selben *Zeilenrang* haben. Man nehme an, daß

$$A_i = \lambda_1 A + \ldots \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \cdots + \lambda_n A_n.$$

D.h. A hat die Gestalt

$$[\, A_1 \quad \ldots \quad A_{i-1} \quad \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \cdots + \lambda_n A_n \quad A_{i+1} \quad \ldots \quad A_n \,]$$

und

$$\tilde{A} = [\, A_1 \quad \ldots \quad A_{i-1} \quad A_{i+1} \quad \ldots \quad A_n \,]$$

Man sieht dann, daß eine Linearkombination der Zeilen von A genau dann gleich null ist, wenn die entsprechende Aussage für $\tilde{A}$ gilt. D.h. A und $\tilde{A}$ haben denselben Zeilenrang.

Jetzt wenden wir den entsprechenden Prozeß auf die Zeilen von A an. Am Ende bekommen wir eine Matrix $\tilde{A}$ mit m' linear unabhängigen Zeilen und n' linear unabhängigen Spalten, wobei m' = Zeilenrang von A, n' = Spaltenrang von A. Dann muß aber $m' \leq n'$ sein (da höchstens n' Vektoren in $\mathbf{R}^{n'}$ linear unabhängig sein können. Siehe unten.) Ähnlicherweise gilt $n' \leq m'$.

Bemerkung: Seien $X_1, \ldots, X_n$ lineare unabhängige m-Vektoren. Dann ist $n \leq m$.

Beweis: Die lineare Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_n$ bedeutet, daß

$$AY = 0$$

keine nicht-triviale Lösung hat, wobei A die $m \times n$ Matrix $[X_1, \ldots, X_n]$ ist. Wir haben aber gesehen, daß dies nur der Fall sein kann, wenn $n \leq m$.

Damit haben wir bewiesen, daß Zeilenrang und Spaltenrang immer gleich sind. Wir können daher einfach $\mathrm{Rg}\,(A)$ (**Rang von A**) für diese Größe schreiben.

Da die Zeilen von A^t genau die Spalten von A sind, können wir unsere Aussage folgendermaßen formulieren:

$$\mathrm{Rg}\,(A) = \mathrm{Rg}\,(A^t).$$

Bemerkung: Es ist klar, daß die elementaren Zeilenformungen keine Änderung des Zeilenranges einer Matrix A induzieren. Daher gilt $\mathrm{Rg}\,(A) = \mathrm{Rg}\,(\tilde{A})$ wobei $\tilde{A}$ die Hermitesche Normalform von $\tilde{A}$ ist. Aber der Rang von $\tilde{A}$ ist genau die Zahl der nicht verschwindenden Zeilen von $\tilde{A}$. Denn diese Zeilen sind linear unabhängig.

Mit Hilfe des Ranges kann man frühere Aussagen über Gleichungssysteme neu formulieren.

Satz: Das $m \times n$ Gleichungssystem

$$AX = Y$$

ist genau dann immer lösbar, wenn $\mathrm{Rg}\,(A) = m$.

Beweis: Wir haben gesehen, daß $AX = Y$ genau dann für jedes Y lösbar ist, wenn $\tilde{A}X = Z$ für jedes Z lösbar ist. Dabei ist $\tilde{A}$ eine Hermitesche Normalform von A. Dies aber ist genau dann der Fall, wenn keine Zeile von $\tilde{A}$ verschwindet, d.h. wenn rang $\tilde{A} = m$. Aber $\mathrm{Rg}\ A = \mathrm{Rg}\ \tilde{A}$. q.e.d.

Korollar: Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{Rg}\ A = n$.

Beweis:
1) Wenn A invertierbar ist, dann ist $AX = Y$ für jedes Y lösbar, d.h. $\mathrm{Rg}\ A = n$.
2) Wenn $\mathrm{Rg}\ A = n$, dann sind die Gleichungen

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ & \vdots & & & \\ a_{n1}x_1 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & y_n \end{array}$$

aber auch die Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{21}x_2 & + \cdots + & a_{n1}x_n & = & y_1 \\ & & & \vdots & & & \\ a_{1n}x_1 & + & a_{2n}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & y_n \end{array}$$

(die der transponierten Matrix A^t entsprechen) immer lösbar. Wählen wir die Vektoren E_k auf der rechten Seite, so sehen wir, daß A sowohl eine links- als auch eine Rechtsinverse hat. Daher ist A invertierbar.

Elementare Spaltenumformungen:

Entsprechend den elementaren Zeilenumformungen und ihren Matrizenrealisierung haben wir
1) Vertauschung von i-ter und j-ter Spalten, d.h. Rechtsmultiplikation mit $U_{i,j}$.

2) Addition von $\lambda \times j$-ter Spalten zur i-ten Spalte, d.h. Rechtsmultiplikation mit $P_{i,j}^{\lambda}$.

3) Multiplikation der i-ten Spalte mit $\lambda\,(\neq 0)$, d.h. Rechtsmultiplikation mit M_i^{λ}.

Wir versuchen nun (unter Verwendung elementarer Zeilen - bzw. Spaltenformungen) eine Matrix auf möglichst einfache Form zu reduzieren.

Zunächst haben wir die Hermitesche Normalform:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{1,j_1+1} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \tilde{a}_{1n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \tilde{a}_{2,j_2+1} & & & \tilde{a}_{2n} \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{r,j_r+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix}$$

Durch Spaltenvertauschung erreichen wir eine matrix der Gestalt:

$$\begin{bmatrix}
1 & \tilde{\tilde{a}}_{1,j_1+1} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \tilde{\tilde{a}}_{1n} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & \tilde{\tilde{a}}_{2,j_2+1} & & & \tilde{\tilde{a}}_{2n} & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
 & \dots\dots\dots\dots & \dots & 1 & \tilde{\tilde{a}}_{r,j_r+1} & \dots & & \tilde{\tilde{a}}_{rn} & 0 & \dots & 0 \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}$$

Substraktion eines geeigneten Vielfachen der ersten Spalte bekommen wir die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \tilde{\tilde{a}}_{2,j_2+1} & & \tilde{\tilde{a}}_{2n} \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & & 0 & \dots & 1 & \tilde{\tilde{a}}_{r,j_r+1} & \dots & \tilde{\tilde{a}}_{rn} \\ 0 & \dots\dots\dots & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Setzen wir fort, so bekommen wir eine Matrix der Gestalt

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zusammenfassend:

Satz: Sei A eine Matix. Dann gibt es invertierbare Matrizen P, Q, sodaß

$$P^{-1}AQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wobei r der Rang von A ist und daher von der Wahl von P, Q unabhängig.

Blockdarstellungen: Bei der Rechnung mit Matrizen ist es oft nützlich, die Matrix in kleinere Matrizen zu zerlegen. Z.B. können wir die 4×4 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 6 & 7 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

in 4 2×2 Matrizen

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

zerlegen.

Wir schreiben

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

wobei

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

usw.

Allgemeiner: Sei A eine $m \times n$ Matrix und

$$0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_r = m, 0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_s = n.$$

Wir definieren eine $(m_i - m_{i-1}) \times (n_j - n_{j-1})$ Matrix A_{ij} wie folgt:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{m_{i-1}+1,n_{j-1}+1} & \dots & a_{m_{i-1}n_j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m_i,n_{j-1}+1} & \dots & a_{m_i,n_j} \end{bmatrix}$$

Dann ist

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{bmatrix}$$

eine **Blockdarstellung** von A.

Angenommen wir haben Blockdarstellungen

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \dots & B_{st} \end{bmatrix}$$

mit A eine $m \times n$ bzw. B eine $n \times p$ Matrix mit entsprechenden Zerlegungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & m_0 & < \cdots < & m_r & = & m \\ 0 & = & n_0 & < \cdots < & n_s & = & n \\ 0 & = & p_0 & < \cdots < & p_t & = & n \end{array}$$

(d.h. die Zerlegung der Spalten von A entspricht der der Reihen von B).

Dann gilt

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \vdots & & \\ C_{s1} & \dots & C_{st} \end{bmatrix}$$

wobei $C_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{s} A_{ij} B_{jk}$

Beispiel: Sei

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ & \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

eine Blockdarstellung der $n \times n$ Matrix A wobei B eine $n_1 \times n_1$ Matrix ist. Dann ist A genau dann invertierbar, wenn B, D invertierbar sind. Es gilt:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}CD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}.$$