§ 4 LINEARE ABBILDUNGEN

Definition: Seien V, V_1 Vektorräume. Eine Abbildung f heißt **linear,** falls

(i) $$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in V)$$

(ii) $$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad (\lambda \in \mathbf{R}, x \in V)$$

Bemerkungen:
I. (i) und (ii) oben sind äquivalent zu:

(iii) $$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)\, (\lambda, \mu \in \mathbf{R}, x, y \in V)$$

II. Ein Isomorphismus ist eine Bijektion, die auch linear ist.

Wir schreiben $L(V, V_1)$ für die Menge aller linearen Abbildungen von V nach V_1. Dieser Raum ist selber ein Vektorraum, wenn wir folgende Operationen einführen:

$$(f + f_1)(x) := f(x) + f_1(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

Räume von linearen Operatoren haben eine zusätzliche Struktur – die der Zusammensetzung. Es ist leicht zu sehen, daß die Zusammensetzung von zwei linearen Operatoren wieder linear ist. Denn:

$$\begin{aligned} f \circ g(x+y) &= f\big(g(x+y)\big) = f\big(g(x) + g(y)\big) = f\big(g(x)\big) + f\big(g(y)\big) \\ &= (f \circ g)(x) + (f \circ g)(y). \end{aligned}$$

Es gilt auch:
1) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ g$
2) $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$
3) $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$.

Im Speziallfall, wo $V = V_1$, induziert diese Operation eine Multiplikation auf dem Raum $L(V) := L(V, V)$. Wir sagen, daß $L(V)$ eine **Algebra** ist (d.h. ein Vektorraum mit einer Multiplikation, die 1) – 3) oben erfüllt).

Beispiele von linearen Abbildungen:

I. Matrizen: Sei A eine Matrix. Wir haben gesehen, daß A eine lineare Abbildung f_A von $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ induziert, wobei $f_A(\xi_1, \dots, \xi_n) = \big(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\big)_{i=1}^m$.

II. Auswertung bzw. Integration für stetige Funktionen: Die Abbildungen

$$f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$$
$$f \mapsto f(0)$$

auf $C[0,1]$ sind linear.

III. Formale Differentiation und Integration: Die Abbildungen

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mapsto a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}$$

und

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mapsto a_0 t + \cdots + \left(\frac{a_n}{n+1}\right) t^{n+1}$$

von Pol (n) in Pol $(n-1)$ bzw. Pol (n) in Pol $(n+1)$ sind linear.

Bemerkung: Wenn $f : V \to V_1$ linear ist und $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis für V ist, dann genügt es, die (endlich viele) Werte $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ zu kennen, um f zu rekonstruieren. Denn für $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in V$, gilt:

$$f(x) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Matrizendarstellungen von linearen Abbildungen:

Der Inhalt dieses Abschnittes ist sehr einfach. Wir haben gesehen, daß $m \times n$ Matrizen lineare Abbildungen von $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ erzeugen. Es ist auch leicht zu sehen, daß alle linearen Abbildungen so entstehen. Da jeder endlich dimensionale Vektorraum zu einem $\mathbf{R}^n$ isomorph ist, läßt sich jede lineare Abbildung als eine Matrix darstellen, wobei die Darstellung abhängig vom Isomorphismus d.h. von der Basenwahl ist.

Zunächst die einfache Bemerkung, daß jede lineare Abbildung $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ von einer Matrix induziert wird, d.h. die Gestalt f_A $(A \in M_{m,n})$ hat. Denn sei $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ die Koordinatendarstellung von $f(e_j)$ und sei A die Matrix $[a_{ij}]$ (d.h. die Spalten von A sind die Bilder der kanonischen Basiselemente von $\mathbf{R}^n$). Dann gilt: $f = f_A$. Denn

$$\begin{aligned}
f((\xi_1, \ldots, \xi_n)) &= f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \xi_j f(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \xi_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j\right) e_i \\
&= f_A((\xi_1, \ldots, \xi_n))
\end{aligned}$$

Seien nun $f: V \to V_1$ eine lineare Abbildung, $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis für V, $(y_1, \dots, y_m)$ eine Basis für V_1. Dann hat $f(x_j)$ eine Darstellung

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

bezüglich (y_i).

Wir nennen diese Matrix $[a_{ij}]$ **die Matrizendarstellung von f bezüglich der Basis (x_i) bzw. (y_j).**

Es gilt dann allgemein:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j\right) y_i. \end{aligned}$$

Wenn wir die Abhängigkeit von f betonen wollen, bezeichnen wir diese Matrix mit A^f. A^f kann man wie folgt beschreiben. Die Basen (x_i) bzw. (y_i) bestimmen Isomorphismen $g: \mathbf{R}^n \to V$ bzw. $\mathbf{R}^m \to V_1$. Die Matrix A^f ist genau die Matrix der entsprechenden Abbildung $h^{-1} \circ f \circ g$ von $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$.

Beispiel: Wir berechnen die Matrix des Differentiationsoperators

$$D: a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mapsto a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}$$

auf Pol (n) bezüglich der Basis $(1, t, \dots, t^n)$ bzw. $(1, t, \dots, t^{n-1})$.
Man sieht leicht, daß

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Ähnlicherweise ist die Matrix des Integrationsoperators

$$I: a_0 + \cdots + a_n t^n \mapsto a_0 t + \cdots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{n+1} \end{bmatrix}$$

Der folgende Satz bestätigt die “Richtigkeit” unserer Definition der Matrizenmultiplikation:

Satz: Seien V, V_1, V_2 Vektorräume mit Basen $(x_k)_{k=1}^p$ bzw. $(y_j)_{j=1}^n$ bzw. $(z_i)_{i=1}^m$. Seien $f \in L(V, V_1)$, $g \in L(V_1, V_2)$, dann gilt

$$A^{g\circ f} = A^g . A^f$$

Beweis: Sei

$$f(x_k) = \sum_{j=1}^n a_{jk} y_j \quad \text{d.h.} \quad A^f = [a_{jk}]$$
$$g(y_j) = \sum_{i=1}^m \tilde{a}_{ij} z_i \quad \text{d.h.} \quad A^g = [\tilde{a}_{ij}].$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(x_k) = g\big(f(x_k)\big) &= g\left(\sum_{j=1}^n a_{jk} y_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n a_{jk} g(y_j) = \sum_{j=1}^n a_{jk}\left(\sum_{i=1}^m \tilde{a}_{ij} z_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} a_{jk}\right) z_i \\
\text{d.h.} \quad A^{g\circ f} &= \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} a_{jk}\right]_{i,k} = A^g . A^f.
\end{aligned}$$

Wenn wir mit Koordinatensystemen arbeiten, dann brauchen wir Formeln, die den Übergang von einer Matrizendarstellung zu einer anderen beschreiben.

Sei daher f ein linearer Operator von V von W und seien $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1', \ldots, x_n')$ (bzw. $(y_1, \ldots, y_m)$, $(y_1', \ldots, y_m')$) Basen für V bzw. W. Sei
A die Matrix von f bzgl. $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_m)$
A' die Matrix von f bzgl. $(x_1', \ldots, x_n')$, $(y_1', \ldots, y_m')$.

Dann gilt:

$$A' = S^{-1} A T$$

wobei $y_j' = \sum\limits_{i=1}^m s_{ij} y_i$, $x_j' = \sum\limits_{i=1}^n t_{ij} x_i$ d.h. S die Übergangsmatrix von (y_i) nach (y_i') bzw. T die Übergangsmatrix von (x_i) nach (x_i') ist.

Beweis: Seien

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{l=1}^{n} \lambda'_l x'_l$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j = \sum_{i=1}^{m} \mu'_i y'_i.$$

Es gilt:

$$\mu_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\lambda_k = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \left(\sum_{l=1}^{n} t_{kl}\lambda'_l \right).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mu'_i &= \sum_{j=1}^{m} \tilde{s}_{ij}\mu_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \tilde{s}_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \left(\sum_{l=1}^{n} t_{kl}\lambda'_l \right) \right) \qquad (\text{wobei} \quad S^{-1} = [\tilde{s}_{ij}]) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \tilde{s}_{ij} a_{jk} t_{kl} \right) \lambda'_l \end{aligned}$$

d.h. A' ist die Matrix $S^{-1}AT$.

Korollar: Sei $f \in L(V)$ und seien $(x_1, \dots, x_n)$ bzw. $(x'_1, \dots, x'_n)$ Basen von V. Dann gilt folgende Beziehung

$$A' = S^{-1}AS$$

wobei S die Übergangsmatrix von (x_i) nach (x'_i) und A bzw. A' die Matrizendarstellung von f bzgl. (x_i) bzw. (x'_i) ist.

Nach diesen Überlegungen ist es natürlich, folgende Definition einzuführen: Zwei $m \times n$ Matrizen A, A' sind **äquivalent,** falls es invertierbare Matrizen $S(m \times m)$, $T(n \times n)$ gibt, sodaß

$$A' = S^{-1}AT$$

d.h. A' und A sind Matrizendarstellungen des gleichen Operators $f \in L(V, W)$ (bzgl. verschiedener Basen in V und W).
Zwei $(n \times n)$ Matrizen A, A' heißten **ähnlich,** falls es eine invertierbare $n \times n$ Matrix S gibt, sodaß

$$A' = S^{-1}AS$$

(d.h. A und A' sind Matrizendarstellungen des gleichen Operators f in $L(V)$ bzgl. verschiedener Basen in V).

Jetzt geben wir eine koordinatenfreie Beschreibung des Ranges einer Matrix.
Sei $f \in L(V, W)$. Wir betrachten folgende wichtigen Teilräume:

$$\begin{aligned} \ker f &= \big\{x \in V : f(x) = 0\big\} \\ \operatorname{Im} f &= f(V). \end{aligned}$$

Wir definieren: $\operatorname{Rang} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim f(V)$
$\operatorname{Korang} f = \dim(\ker f)$

Falls f eine von einer Matrix erzeugte Abbildung f_A ist, dann ist

$$\ker(f_A) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) : A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = 0\}$$

d.h. die Lösungsmenge des homogenen Systems $AX = 0$.

$f_A(\mathbf{R}^n)$ ist die Menge aller Vektoren $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, sodaß $\xi_1, \ldots, \xi_n$ existieren, mit

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}$$

d.h. die Menge der n-Tupeln $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, für die die inhomogene Gleichung lösbar ist. Daraus sieht man, daß Rang (f_A) gleich Rg (A) ist.

Satz: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: $\dim f(V) \leq \dim V$.

Beweis: Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis für V. Es ist klar, daß die Menge $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ $f(V)$ aufspannt. Daraus folgt: $\dim f(V) \leq n$.

Korollar: Seien $f: V \to V_1$, $g: V_1 \to V_2$ lineare Abbildungen. Dann gilt:

$$\operatorname{Rang}(g \circ f) \leq \operatorname{Rang}(f), \operatorname{Rang}(g \circ f) \leq \operatorname{Rang}(g).$$

(Für Matrizen: Rg $(AB) \leq$ Rg (A), Rg $(AB) \leq$ Rg (B)—Vgl. Kapitel 2).

Satz: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\operatorname{Rang}(f) + \operatorname{Korang}(f) = \dim V.$$

Beweis: Wir wählen eine Basis $(x_1, \ldots, x_n)$, sodaß $(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ eine Basis für $\ker(f)$ ist. Setze $V_1 := [x_1, \ldots, x_r]$, $V_2 := [x_{r+1}, \ldots, x_n]$. Wir behaupten, daß $f|_{V_1}$ ein Isomorphismus von V_1 auf $f(V)$ ist.

1) $f|_{V_1}$ ist injektiv. Seien $x, y \in V_1$ mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt $f(x-y) = 0$ d.h. $x - y = \ker(f)$. Aber $x - y \in V_1$ – daher gilt: $x - y \in \ker(f) \cap V_1 = \{0\}$ d.h. $x = y$.

2) $f(V_1) = f(V)$. Trivialerweise gilt: $f(V_1) \subseteq f(V)$. Andererseits hat jedes $x \in V$ eine Darstellung $y + z\,(y \in \ker(f),\, z \in V_1)$. Dann gilt:

$$f(x) = f(y) + f(z) = f(z) \in f(V_1)$$

d.h. $f(V) \subseteq f(V_1)$.
Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim V_1 + \dim V_2\\ &= \dim f(V) + \dim \ker(f)\\ &= \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Korang}(f).\end{aligned}$$

Satz: Sei f eine lineare Abbildung von V in V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) f ist ein Isomorphismus;
2) f ist injektiv;
3) f ist surjektiv;

Beweis: Es ist klar, daß 1) impliziert 2) und 3).

2) impliziert 1): Aus der obigen Konstruktion folgt, daß $\dim f(V) = \dim V$. Daraus folgt: $f(V) = V$.

3) impliziert 1): Wiederum folgt: $\dim \ker(f) = 0$ d.h. f ist injektiv.

Projektionen: Eine wichtige Klasse von linearen Abbildungen sind diejenige, die wie folgt entstehen: Falls V_1 ein Teilraum von V ist, und V_2 ein komplementärer Teilraum, dann hat jedes $x \in V$ eine eindeutige Darstellung $x = y + z$ $(y \in V_1, z \in V_2)$. Die Abbildung

$$P\colon x \mapsto y$$

ist linear – wir nennen sie die **Projektion auf V_1 entlang V_2.**

Beispiel: Falls V_1 eine Ebene in $\mathbf{R}^3$, V_2 eine Gerade (beide durch 0), dann ist die Projektion von x auf V_1 entlang V_2 der Punkt, wo die Gerade durch x, parallel zu V_2, V_1 schneidet.

Falls P eine Projektion ist, dann gilt: $P^2 = P$. Andererseits ist jede lineare Abbildung P mit $P^2 = P$ eine Projektion und zwar die Projektion auf $V_1 := P(V)$ entlang $V_2 := (\mathrm{Id} - P)V$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß V_1 und V_2 komplementär sind. Denn jedes x hat die Darstellung $Px + (\mathrm{Id} - P)x$, wobei $Px \in V_1$ und $(\mathrm{Id} - P)x \in V_2$. Außerdem gilt: $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Denn $x \in V_1$ gilt genau dann, wenn $x = Py$ $(y \in V)$. Daraus folgt $Px = P^2 y = Py = x$. Falls $x \in V_2$, dann gilt:

$$x = (\mathrm{Id} - P)z \qquad (z \in V)$$

und daher

$$(\mathrm{Id} - P)x = (\mathrm{Id} - P)^2 z = (\mathrm{Id} - 2P + P^2)z = (\mathrm{Id} - P)z = x.$$

Daraus folgt: $x = Px = 0$.
Diese Überlegung zeigt, daß $\mathrm{Id} - P$ die Projektion auf V_2 entlang V_1 ist. Außerdem ist $V_2 = \ker(P)$.

Wir werden jetzt zeigen, daß Projektionen genau diejenigen linearen Abbildungen sind, die eine Matrizendarstellung der Art

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bzgl. einer geeigneten Basis $(x_1, \dots, x_n)$ haben.

Es ist klar, daß eine lineare Abbildung P mit einer solchen Darstellung die Bedingung $P^2 = P$ erfüllt. Daher ist P eine Projektion.

Sei jetzt P die Projektion auf V_1 entlang V_2. Wir wählen eine Basis $(x_1, \dots, x_n)$, sodaß $(x_1, \dots, x_r)$ (bzw. $(x_{r+1}, \dots, x_n)$) eine Basis für V_1 bzw. V_2. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Px_1 = x_1, \dots, Px_r &= x_r \\ Px_{r+1} = \dots = Px_n &= 0 \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ist die Matrix von P bzgl. $(x_1, \dots, x_n)$.

Zerlegungen und Blockdarstellungen: Seien jetzt V, W Vektorräume mit Zerlegungen:

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad W = W_1 \oplus W_2.$$

Sei P (bzw. Q) die Projektion auf V_1 entlang V_2 (bzw. W_1 entlang W_2). Dann ist $(\mathrm{Id} - P)$ (bzw. $(\mathrm{Id} - Q)$) die Projektion auf V_2 entlang V_1 (bzw. auf W_2 entlang W_1).
$f\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Wir definieren lineare Abbildungen

$$f_{11}\colon V_1 \to W_1, f_{12}\colon V_2 \to W_1, f_{21}\colon V_1 \to W_2, f_{22}\colon V_2 \to W_2$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} f_{11}(x) &= Qf(x) \quad (x \in V_1) \\ f_{21}(x) &= (\mathrm{Id} - Q)f(x) \quad (x \in V_1) \\ f_{12}(x) &= Qf(x) \quad (x \in V_2) \\ f_{22}(x) &= (\mathrm{Id} - Q)f(x) \quad (x \in V_2). \end{aligned}$$

Für $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$ gilt:

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2) + f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2).$$

Wir schreiben symbolisch:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

bzw.

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(x_1) & +f_{12}(x_2) \\ f_{21}(x_1) & +f_2(x_2) \end{bmatrix}$$

Seien jetzt $(x_1, \dots, x_n)$ bzw. $(y_1, \dots, y_m)$ Basen für V bzw. W, sodaß

$$\begin{array}{rll} (x_1, \dots, x_{n_1}) & \text{eine Basis für} & V_1; \\ (x_{n_1+1}, \dots, x_n) & \text{eine Basis für} & V_2; \\ (y_1, \dots, y_{m_1}) & \text{eine Basis für} & W_1; \\ (y_{m_1+1}, \dots, y_m) & \text{eine Basis für} & W_2 \end{array}$$

sind.
Die entsprechende Matrix für f sei A. A hat eine Blockdarstellung

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

(wobei A_{11} eine $n_1 \times m_1$ Matrix ist usw.) Dann ist A_{ij} die Matrix von f_{ij} (bzgl. den entsprechenden Basen).
Besonders wichtig sind die folgenden Fälle:

1) $f(V_1) \subseteq W_1$. Dann ist $f_{21} = 0$, d. h. die Blockdarstellung hat die Gestalt

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

2) $f(V_1) \subseteq W_1$ und $f(V_2) \subseteq W_2$. Dann gilt $f_{12} = 0$, $f_{21} = 0$ und die Blockdarstellung hat die Gestalt

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Im Spezialfall, wo $V = W$, $V_1 = W_1$, $V_2 = W_2$, sagen wir, daß V_1 f-**variant** ist, falls $f(V_1) \subseteq V_1$. Die obigen Überlegungen zeigen, daß die Existenz von invarianten Teilräumen vereinfachte Darstellungen für f liefern.