SKRIPTUM – LINEARE ALGEBRA II

J.B. COOPER

Inhaltsverzeichnis:

Anhang:

V. DETERMINANTEN

In diesem Kapitel entwickeln wir die Theorie der Determinanten. Die folgenden Beispiele sollen die Einführung dieses Begriffes motivieren.

I. Betrachten wir das einfache Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

falls $ad - bc \neq 0$, oder, wenn wir die Bezeichnung

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

einführen,

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

Wir stellen daher folgende Frage:
Gibt es eine Funktion

$$\det \colon M_n \to \mathbf{R},$$

sodaß die Lösung von $AX = Y$ folgendermaßen gegeben wird:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

wobei

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & y_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & y_n & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(falls $\det A \neq 0$)?

Wir werden unten sehen, daß eine solche Funktion tatsächlich existiert.

II. Erinnern wir uns, daß

$$ad - bc \left(= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)$$

der Flächeninhalt des von den Vektoren (a, c) und (b, d) aufgespannten Parallelogramms ist. Anderseits gilt:

$(a, c) = fe_1$, $(c, d) = fe_2$ wobein $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ und f der von $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ erzeugte Operator ist. Eine natürliche Verallgemeinerung der 2-dimensionalen Determinante wäre daher: Sei $A = [A_1, \ldots, A_n]$ eine $n \times n$ Matrix, wobie A_i die i-te Spalte von A ist. Wir definieren

$\det A =$ das Volumen des von $A_1, \ldots, A_n$ aufgespannten Parallelopeds
$=$ das Volumen des Bildes bzgl. f_A des Einheitswürfels $\{(\xi_1, \ldots, \xi_n)\colon 0 \leq \xi_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$.

Geometrisch ist dann klar, daß

a) $\det I_n = 1$;

b) det ist linear in jeder Spalte d.h.
$\det\big([A_1, \ldots, \lambda A_i + \mu A_i', \ldots, A_n]\big) = \lambda \det\big([A_1, \ldots, A_n]\big) + \mu \det\big([A_1, \ldots, A_i', \ldots, A_n]\big)$.

c) falls $A_i = A_j$ für irgendwelche i, j mit $i \neq j$, dann ist $\det(A) = 0$.

Wir werden jetzt zeigen, daß eine Funktion mit diesen Eigenschaften existiert. (Tatsächlich werden wir die Existenz einer Funktion, die bezüglich der Zeilen linear ist, beweisen. Später werden wir allerdings sehen, daß sie dann automatisch linear bzgl. der Spalten ist.)

Genauer: Es gibt genau eine Funktion

$$\det\colon M_n \to \mathbf{R}$$

mit den Eigenschaften

(i) det ist linear in jeder Zeile

(ii) $\det I_n = 1$

(iii) vertauscht man zwei Zeilen einer Matrix A, so ändert sich das Vorzeichen der Determinanten.

Bevor wir beweisen, daß eine solche Abbildung existiert, werden wir einige ihrer Eigenschaften untersuchen(!!!)

I. Sind zwei Zeilen einer Matrix A gleich, so gilt $\det A = 0$. (Denn nach (iii) gilt $\det A = -\det A$ (vertausche die identischen Zeilen!)).

II. Ersetzt man die i-te Zeile A_i von A mit der Summe $A_i + \lambda A_j$ $(i \neq j)$, so ändert sich die Determinante nicht. D.h.

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + \lambda A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Denn

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + \lambda A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \lambda \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

(Linearität)

$$= \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad (\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = 0 \quad \text{nach} \quad \text{I}).$$

III. $\det A = 0$ falls eine Zeile linear abhängig von den anderen ist.
Denn sei $A_j = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{j-1} A_{j-1} + \lambda_{j+1} A_{j+1} + \cdots + \lambda_n A_n$, dann gilt:

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ \lambda A_1 + \cdots + \lambda_{j-1} A_{j-1} + \lambda_{j+1} A_{j+1} + \cdots + \lambda_n A_n \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i<j} \lambda_i \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \sum_{i>j} \lambda_i \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = 0$$

IV. $\det A = 0$ falls $\text{Rang}\, A < n$.

V. Es gibt höchstens eine Abbildung det mit Eigenschaften (i) – (iii). Denn seien $\det_1$, $\det_2$ solche Abbildungen. Dann gilt $\det_1 A = 0 = \det_2 A$ falls $\quad \text{rang} \quad A < n$. Betrachten wir daher Matrizen A mit Rang n. Wir wissen, daß wir A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix I tranformieren können. Es gilt $\det_1 I_n = \det_2 I_n$ und jede Umformung induziert dieselbe Änderung in $\det_1$ bzw. $\det_2$. Daher gilt $\det_1 A = \det_2 A$.

Wir beweisen jetzt die Existenz einer Abbildung det mit obigen Eigenschaften. Wir führen einen Induktionsbeweis nach n durch:
Für $n = 1$ ist die Aussage klar (setze $\det[a] = a$).
Der Schritt $n - 1 \to n$.
Wir definieren:

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A_{i1}\end{aligned}$$

wobei A_{i1} die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist, die man durch Weglassen der ersten Spalte und der i-ten Zeile bekommt.

(N.B. jedes A_{i1} ist eine $(n-1) \times (n-1)$ Matrix – daher ist $\det A_{i1}$ definiert (Induktionshypothese).)

Wir zeigen, daß diese Abbildung die Eigenschaften (i) – (iii) besitzt:
1) Linearität in der k-ten Zeile; die Determinanten von

$$A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{k-1,1}, A_{k+1,1}, \ldots, A_{n1}$$

sind linear, nach der Induktionsvoraussetzung.
Der Ausdruck $a_{k1} \det A_{k1}$ ist linear in a_{k1} und A_{k1} ist unabhängig von A_k.

2) $\det I_n = 1$ – einfacher Induktionsbeweis:

3) Sei

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det A &= A_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \cdots + (-1)^{1+i} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots \pm a_{n1} \det A_{n1} \\ \det A' &= a_{11} \det A'_{11} - a_{21} \det A'_{21} + \cdots + (-1)^{1+i} a'_{i1} \det A'_{i1} + \cdots \pm a'_{n1} \det A'_{n1}.\end{aligned}$$

Für $k \neq i$ oder j ist A'_{k1} einfach A_{k1} mit zwei Zeilen vertauscht. Daher gilt $\det A'_{k1} = -\det A_{k1}$ (Induktionsannahme).

An der i-ten Stelle der Entwicklung von $\det A$ bzw. der j-ten Spalte der Entwicklung von $\det A'$ stehen die Ausdrücke

$$(-1)^{1+i} a_{i1} \det \begin{bmatrix} \widehat{A_1} \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (-1)^{1+j} a_{i1} \det \begin{bmatrix} \widehat{A_1} \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

wobei das Dach bedeutet, daß die erste Spalte gestrichen ist. Man kann die zweite Matrix in die erste überführen, indem man $j - i - 2$ Zeilenvertauschungen durchführt.

Daher gilt:

$$\det \begin{bmatrix} \widehat{A_1} \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = (-1)^{j-i} \det \begin{bmatrix} \widehat{A_1} \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_j \\ A_{i+1} \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

also

$$(-1)^{1+i} a_{i1} \det A_{i1} = -(-1)^{1+j} a'_{i1} \det A'_{i1}$$

Ähnlicherweise gilt

$$(-1)^{1+j} a_{j1} \det A_{j1} = -(-1)^{1+i} a'_{i1} \det A'_{i1}$$

Damit gilt $\det A' = -\det A$.

Der Ausdruck

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \dots$$

heißt die **Entwicklung von A nach der ersten Spalte.** Ähnlicherweise kann man $\det A$ nach der j-ten Spalte entwickeln:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die man durch Weglassen von der i-ten Zeilen und der j-ten Spalte bekommt, ist.

Der gleiche Beweis wie oben zeigt, daß dieser Ausdruck auch Eigenschaften (i) – (iii) besitzt. Die Formel folgt dann aus der Eindeutigkeit.

Als Beispiel zeigen wir, daß die Determinante $\det A$ einer Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

gleich das Produkt $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ der diagonalen Elemente ist. Denn wenn wir $\det A$ nach der ersten Spalte entwickeln, sehen wir, daß

$$\det A = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ 0 & \dots\dots\dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Das gesuchte Ergebnis folgt mit Hilfe der mathematischen Induktion.
Nach diesem Beispiel kann man folgenden Algorithmus zur Rechnung von Determinanten verwenden. Mit Hilfe der Gauß'schen Elimination reduziert man A auf eine Dreiecksmatrix, deren Determinante man leicht ausrechnen kann. Am bequemsten macht man das wie folgt:

Beispiel: Berechne

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\det A &= -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
&= -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & \text{-}13 & -5 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \\
&= -\det \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -7 & -13 & -15 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \\
&= -4\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ -7 & -13 & -15 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \\
&= -4\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{17}{4} & -15 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 6 \end{bmatrix} \\
&= -4\det \begin{bmatrix} -\frac{17}{4} & -15 \\ -\frac{1}{4} & 6 \end{bmatrix} \quad = \quad -4\left(\frac{-102}{4} - \frac{15}{4}\right) \\
&= \ 117
\end{aligned}
$$

(Eigentlich würde man bei Schritt (§) aufhören und die 3×3 Determinante wie im Kap. II ausrechnen.)

Wir haben gesehen, daß $\det A = 0$ falls die Zeilen von A linear abhängig sind, d.h. falls Rg $A < n$. Jetzt zeigen wir, daß die Umkehrung gilt, d.h. Rg $A = n$ oder A ist invertierbar genau dann, wenn $\det A \neq 0$. Aber falls Rg $A = n$, dann können wir A durch Anwendung von elementaren Zeilenformungen aus I_n gewinnen. Da $\det I_n = 1 \neq 0$ und die Zeilenformungen die folgende Wirkung auf die Determinante haben, gilt $\det A \neq 0$.

1) Austausch von A_i und A_j: Multiplikation mit -1.
2) $A_i \to A_i + \lambda A_j$: Determinante unverändert.
3) $A_i \to \lambda A_i\,(\lambda \neq 0)$: Multiplikation mit λ.

Mit diesen Eigenschaften ist es jetzt fast trivial, die Multiplikativität der Determinante zu beweisen. Es gilt nämlich:

$$\det AB = \det A \det B$$

Denn die Abbildung

$$A \mapsto \det AB$$

erfüllt die Bedingungen (i) und (iii). Wir betrachten jetzt zwei Fälle:
a) $\det B \neq 0$. Dann erfüllt

$$A \mapsto \frac{\det AB}{\det B}$$

Bedingungen (i) – (iii) – also gilt $\dfrac{\det AB}{\det B} = \det A$ (Eindeutigkeit!).

b) $\det B = 0$. Dann gilt Rang $B < n$ und daher Rang $AB < n$ d.h. $\det AB = 0$.

Inverse und Determinanten: Sei A eine $n \times n$ Matrix. Wir führen die Matrix

$$\operatorname{adj} A = [(-1)^{i+j} \det A_{ji}]$$

ein.

Sei $(\operatorname{adj} A)A = [b_{ik}]$. Dann gilt:

$$b_{ik} = (-1)^{i+1} \det A_{1i} a_{1k} + (-1)^{i+2} \det A_{2i} a_{2k} + \cdots + (-1)^{i+n} \det A_{ni} a_{nk}$$

Daraus folgt: $b_{ii} = \det A$. Denn rechts steht die Entwicklung von $\det A$ bzgl. der i-ten Spalte. Anderseits gilt

$$b_{ik} = 0 \quad \text{falls} \quad i \neq k.$$

Denn in diesem Fall haben wir die Entwicklung von $\det \tilde{A}$ bzgl. der k-ten Spalte, wobei $\tilde{A}$ die Matrix ist, die man erhält, wenn man die i-te Spalte von A durch die k-te Spalte ersetzt. Es gilt $\det \tilde{A} = 0$, weil Rg $\tilde{A} < n$.
Damit haben wir folgende Formel bewiesen

$$\operatorname{adj} A.A = (\det A).I_n$$

Satz: Sei A eine $n \times n$ Matrix mit $\det A \neq 0$. Dann ist A invertierbar und

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \\ &= \frac{1}{\det A} [(-1)^{i+j} \det A_{ji}]. \end{aligned}$$

Bis jetzt sind wir bei der Behandlung von Determinanten von der Linearität bzgl. der Zeilen ausgegangen. Genauso logisch wäre es gewesen, eine Funktion zu finden, die linear bzgl. den Spalten wäre. Analoge Überlegungen wie oben führen zu einer Funktion Det mit der Eigenschaft:

$$\operatorname{Det} A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \operatorname{Det} A_{ij}.$$

Wir werden jetzt sehen, daß

$$\det A = \operatorname{Det} A$$

sodaß det auch automatisch linear bzgl. der Spalten ist. Zunächst folgende Bemerkung. Es gilt:

$$\operatorname{Det} A = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \det A = 0$$

Denn $\det A = 0$ (bzw. $\operatorname{Det} A = 0$) genau dann, wenn der Zeilenrang (bzw. Spaltenrang) von A kleiner als n ist. D.h. $\operatorname{Det}(A) = \det A$ für nicht invertierbare Matrizen.
Sei daher A invertierbar. Wir wissen, daß

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \det A.I_n$$

Wir führen jetzt einen Induktionsbeweis nach n durch.

$$n = 1\colon \det[a] = a = \operatorname{Det}[a]$$

$n-1 \to n$: Aus der Formel $A(\operatorname{adj} A) = \det A.I_n$ sehen wir, daß

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \operatorname{Det} A_{ij} \quad \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \operatorname{Det} A \quad \text{(Entwicklung von} \operatorname{Det} A \,\text{nach der i-ten Zeile).}
\end{aligned}$$

Eine nützliche Formel zum Ausrechnen von Determinanten ist die folgende:
Sei A eine $n \times n$ Matrix mit Blockdarstellung

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

wobei B eine $n_1 \times n_1$ Matrix ist.
Dann gilt: $\det A = \det B \det D$.

Beweis: Wir können annehmen, daß A und daher auch B, D invertierbar sind (denn sonst wären sowohl $\det A$ als auch $\det B \, \det D$ gleich null). Zunächst gilt:

$$\det \begin{bmatrix} I & -B^{-1}C \\ 0 & I \end{bmatrix} = 1$$

Daher gilt:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -B^{-1}C \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Die Funktion

$$B \mapsto \det \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

erfüllt die Bedingungen (i), (iii) auf S.V.3.
Daher gilt

$$\det \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = c \det B$$

wobei

$$c = \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Es ist aber klar, daß

$$\det \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det D$$

Die CRAMER'sche Regel: Jetzt kehren wir zu unserer ersten Überlegung über die Anwendung von Determinanten auf Gleichungen zurück.

Satz: Betrachte die Gleichung $AX = Y$, wobei $\det A \neq 0$. Dann ist die (eindeutige) Lösung

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

gegeben durch:

$$x_i = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & y_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det[a_{ij}]}$$

Beweis: Man kann die Gleichungen wie folgt hinschreiben:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} x_i a_{1i} - y_i \\ \vdots \\ x_i a_{ni} - y_n \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

d.h. die Spalten der Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & (x_i a_{1i} - y_1) & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{n,i-1} & (x_i a_{ni} - y_n) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

sind linear abhängig – daher ist die entsprechende Determinante null. Wegen der Linearität der i-ten Spalte gilt:

$$x_i \det[a_{ij}] - \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & y_n & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

Wir haben gerade gesehen, wie wir jeder $n \times n$ Matrix A eine Zahl ($\det A$) zuordnen kann, mit der Eigenschaft (unter anderen), daß sie aussagt, ob die Matrix invertierbar ist. Da wir jedem Operator eine Matrix zuordnen können, ist es naheliegend, die Determinante eines Operators als die Determinante dieser Matrix zu definieren. Da aber die Matrizendarstellung eines Operators abhängig von der Basiswahl ist, könnte diese Determinante *a priori* auch von der Basiswahl abhängig sein. Wir werden aber jetzt zeigen, daß dies nicht der Fall ist.
Denn sei $(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $(x'_1, \ldots, x'_n)$ eine Basis für einen Vektorraum V, A und B die Matrizendarstellung von $f \in L(V)$ bzgl. $(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Wir behaupten, daß $\det A = \det B$. Denn wir wissen, daß

$$A = S^{-1} B\, S$$

wobei S die Übergangsmatrix von $(x_1, \ldots, x_n)$ nach $(x'_1, \ldots, x'_n)$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\det A &= \det(S^{-1} B\, S) \\
&= \det(S^{-1}) \det B \det S \\
&= \det(S^{-1}) \det S \det B \\
&= \det(S^{-1} S) \det B \\
&= \det(I_n) \det B \\
&= \det B.
\end{aligned}$$

Daher können wir jetzt die folgende Definition aufstellen:

Definition: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $f \in L(V)$.
Dann definieren wir:

$$\det f := \det A$$

wobei A die Matrizendarstellung von f bzgl. einer Basis für V ist.

Diese Abbildung hat folgende Eigenschaften, die sofort aus den entsprechenden Eigenschaften von Matrizendeterminanten folgen:

I. $\det f \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist ein Isomorphismus.
II. $\det fg = \det f \det g$.
III. $\det(\mathrm{Id}) = 1$.

Zum Schluß dieses Kapitels bringen wir eine Zusammenfassung einiger Anwendungen von Determinanten:

I. Lösbarkeit von Gleichungssystemen:
Das System

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= y \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n
\end{aligned}$$

ist genau dann immer lösbar, wenn $\det[a_{ij}] \neq 0$.

II. Das Erkennen von Basen:
Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis für V. Eine Menge $(x'_1, \ldots, x'_n)$ ist genau dann eine Basis, wenn $\det[t_{ij}] \neq 0$, wobei $x'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij} x_i$.
(Z.B.: $(1,1,1,1)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,1,1)$, $(0,0,0,1)$ ist eine Basis für $\mathbf{R}^4$, weil

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1).$$

III. Strecken, Flächeninhalt, Rauminhalt:

Seien ξ, η Punkte in $\mathbf{R}$. Dann ist

$$\det \begin{bmatrix} \eta & 1 \\ \xi & 1 \end{bmatrix} = \eta - \xi$$

die **Länge** der Strecke von ξ nach η (mit Vorzeichen). (N.B. Das Vorzeichen ist wichtig – etwa damit die Länge additiv ist.)

Seien jetzt $A = (\xi_1, \xi_2)$, $= (\eta_1, \eta_2)$, $C = (\zeta_1, \zeta_2)$ Punkte in $\mathbf{R}^2$.

$$\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & 1 \end{bmatrix}$$

ist der Inhalt des Dreiecks ABC. (Das Vorzeichen hat folgende geometrische Bedeutung: Der Inhalt ist positiv, wenn der Umlauf $A \to B \to C$ gegen den Uhrzeigersinn ist. Es gilt dann immer $\Delta ABC = \Delta OAB + \Delta OBC + \Delta OCA$.)

Falls $A = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $B = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $C = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, $D = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ in $\mathbf{R}^3$ sind, dann ist

$$\frac{1}{3!} \det \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_1 & \xi_3 & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & 1 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 & 1 \end{bmatrix}$$

der Rauminhalt des Tetraeders $ABCD$

IV. Wirkung von linearen Abbildungen auf Inhalt Sei f eine lineare Abbildung von $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ mit Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

f bildet den Tetraeder $BCDE$ in den Tetraeder $B'C'D'E'$ wobei $B' = f(B)$ usw.

Der Inhalt von $BCDE$ ist:

$$\frac{1}{6}\det\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 1 \end{bmatrix}$$

und von $B'C'D'E'$

$$\frac{1}{6}\det\begin{bmatrix} \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & 1 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 & 1 \\ \zeta'_1 & \zeta'_2 & \zeta'_3 & 1 \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \nu'_3 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei

$$\begin{bmatrix} \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & 1 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 & 1 \\ \zeta'_1 & \zeta'_2 & \zeta'_3 & 1 \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \nu'_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^t & & 0 \\ & & \\ & & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Es gilt daher: Inhalt $B'C'D'E' = (\det A)$ (Inhalt $BCDE$). D.h. f multipliziert alle tetraederinhalte (und daher alle Inhalte) mit dem Faktor $\det A$.

V. Kurvengleichungen:

Seien $P = (\xi_1^1, \xi_2^1)$, $Q = (\xi_1^2, \xi_2^2)$ verschiedene Punkte in $\mathbf{R}^2$. Gesucht ist die Gerade $L_{a,b,c}$ durch P und Q. Es gilt:

$$a\xi_1^1 + b\xi_2^2 + c = 0 \qquad (1)$$
$$a\xi_1^2 + b\xi_2^2 + c = 0 \qquad (2)$$

(ξ_1, ξ_2) liegt auf der Geraden, wenn

$$a\xi_1 + b\xi_2 + c = 0 \qquad (3).$$

Wir haben drei Gleichungen $(1), (2), (3)$ in a, b, c. Eine nicht triviale Lösung existiert genau dann, wenn

$$\det\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & 1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Dies ist die gesuchte Gleichung:
(Beispiel: Die Gerade durch $(3, 6)$, $(4, 2)$ hat die Gleichung:

$$\det\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

d.h. $4\xi_1 + \xi_2 - 18 = 0$).

Ähnliche Überlegungen führen zu folgenden Ergebnissen: Die **Ebene** durch $(\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1)$, $(\xi_1^2\xi_2^2, \xi_3^2)$, $(\xi_1^3, \xi_2^3, \xi_3^3)$ hat die Gleichung:

$$\det \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 1 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \xi_3^1 & 1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^1 & 1 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

(Beispiel: Die Gleichung der Ebene durch $(1, 0, -1)$, $(2, -1, 2)$, $(3, 0, 1)$ ist

$$\det \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Der Kreis durch (ξ_1^1, ξ_2^1), (ξ_1^2, ξ_2^2), (ξ_1^3, ξ_2^3) hat die Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 & \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ (\xi_1^1)^2 + (\xi_2^1)^2 & \xi_1^1 & \xi_2^1 & 1 \\ (\xi_1^2)^2 + (\xi_2^2)^2 & \xi_1^2 & \xi_2^2 & 1 \\ (\xi_1^3)^2 + (\xi_2^3)^2 & \xi_1^3 & \xi_2^3 & 1 \end{bmatrix} = 0).$$

(N.B. Der Koeffizient von $\xi_1^2 + \xi_2^2$ ist

$$\det \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & 1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & 1 \\ \xi_1^3 & \xi_3^3 & 1 \end{bmatrix}$$

und dies ist genau dann nicht null, wenn (ξ_1^1, ξ_2^1), (ξ_1^2, ξ_2^2), (ξ_1^3, ξ_2^3) nicht kollinear sind.)

(Beispiel: Der Kreis durch $(3, 1), (1, 0), (0, 0)$ hat die Gleichung:

$$\det \begin{bmatrix} (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 & \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.)$$

Der Kegelschnitt durch $(\xi_1^1, \xi_2^1), (\xi_1^2, \xi_2^2), (\xi_1^3, \xi_2^3), (\xi_1^4, \xi_2^4), (\xi_1^5, \xi_2^5)$ hat die Gleichung:

$$\det \begin{bmatrix} (\xi_1)^2 & \xi_1\xi_2 & (\xi_2)^2 & \xi_1 & \xi_2 & 1 \\ (\xi_1^1)^2 & \xi_1^1\xi_2^1 & (\xi_2^1)^2 & \xi_1^1 & \xi_2^1 & 1 \\ (\xi_1^2)^2 & \xi_1^2\xi_2^2 & (\xi_2^2)^2 & \xi_1^2 & \xi_2^2 & 1 \\ (\xi_1^3)^2 & \xi_1^3\xi_2^3 & (\xi_2^3)^2 & \xi_1^3 & \xi_2^3 & 1 \\ (\xi_1^4)^2 & \xi_1^4\xi_2^4 & (\xi_2^4)^2 & \xi_1^4 & \xi_2^4 & 1 \\ (\xi_1^5)^2 & \xi_1^5\xi_2^5 & (\xi_2^5)^2 & \xi_1^5 & \xi_2^5 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

VI. Orientierung:

Ein linearer Isomorphismus f auf V ist **orientierungserhaltend** falls $\det f > 0$. Sonst

ist f **orientierungsumkehrend.** Z.B. eine lineare Isomentrie f auf $\mathbf{R}^2$ ist
1) orientierungserhaltend, falls f eine Drehung ist;
2) orientierungsumkehrend, falls f eine Spiegelung ist.
Eine orientierungserhaltende Isometrie auf $\mathbf{R}^3$ bildet Rechtsschrauben in Rechtschrauben ab.

Zwei Basen $(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $(x'_1, \ldots, x'_n)$ heißen **gleichorientiert** (geschrieben

$$(x_1, \ldots, x_n) \overset{go}{\sim} (x'_1, \ldots, x_n)),$$

falls die lineare Abbildung f, die x_i in x'_i abbildet, orientierungserhaltend ist (d.h. die Determinante der Übergangsmatrix von (x_i) nach (x'_i) ist positiv).

Beispiel: (e_1, e_2, e_3), (e_2, e_3, e_1) und (e_3, e_1, e_2) sind gleichorientiert in $\mathbf{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) und (e_2, e_1, e_3) dagegen nicht.

Die obige Beziehung "$\overset{go}{\sim}$" ist eine Äquivalenzrelation d.h. sie ist
a) **reflexiv** (d.h. $(x_i) \overset{go}{\sim} (x_i)$);
b) **transitiv** (d.h. aus $(x_i) \overset{go}{\sim} (x'_i)$ und $(x'_i) \overset{go}{\sim} (x''_i)$ folgt $(x_i) \overset{go}{\sim} (x''_i)$);
c) **symmetrisch** (d.h. aus $(x_i) \overset{go}{\sim} (x'_i)$ folgt $(x'_i) \overset{go}{\sim} (x_i)$).