VI. EIGENWERTE:

Sei f ein Opetaror in $L(V)$. Das **Eigenwertproblem** für f ist die Gleichung

$$f(x) = \lambda x \qquad (*)$$

d.h. man sucht einen Vektor x und einen Skalar λ sodaß $(*)$ gilt (außer der trivialen Lösung $x = 0$, λ willkürlich). Ein Skalar λ heißt **Eigenwert** von f, falls ein solches $x \neq 0$ existiert. x heißt dann **Eigenvektor** von f bzgl. λ. Ein Eigenvektor ist daher ein Vektor, der von f gestreckt aber nicht gedreht wird. Ein Operator braucht keine Eigenwerte bzw. Eigenvektoren zu besitzen.
(Einfaches Beispiel – eine Drehung um 90^o in $\mathbf{R}^2$)

Wegen dem Zusammenhang zwischen linearen Operatoren und Matrizen kann man das Eigenwertproblem auch folgendermaßen formulieren: Zu einer $n \times n$ Matrix A sucht man eine $n \times 1$ Matrix $X (\neq 0)$ und ein $\lambda \in \mathbf{R}$, sodaß

$$AX = \lambda X$$

λ heißt dann **Eigenwert** von A, und X heißt **Eigenvektor** von A bzgl. λ.

(Bemerkung: Es folgt sofort, daß die Eigenwerte von A und B gleich sind, falls A und B ähnlich sind. Denn A und B sind Matrizendarstellungen des gleichen Operators f und die Eigenwerte etwa von A sind genau diejenigen von f.)

Bevor wir Eigenschaften von Eigenwerten und Eingenvektoren untersuchen, bringen wir ein Beispiel eines Problems, wo sie eine wichtige Rolle spielen.

Differentialgleichungssysteme: Als konkretes Beispiel betrachten wir folgendes gekoppeltes System: gesucht sind Funktionen f, g ,sodaß

$$\frac{df}{dt} = 3f + 2g$$
$$\frac{dg}{dt} = f + 2g$$

Schreiben wir F für die Matrizenfunktion

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

so können wir die Gleichung in die Gestalt

$$\frac{dF}{dt} = AF \quad \text{wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

schreiben.

Analog zum Fall einer einzigen Diferentialgleichung versuchen wir den Ansatz:

$$F(t) = e^{\lambda t} X$$

wobei X eine 2×1 Matrix

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ist.
(D.h. $f(t) = x_1 e^{\lambda t}$, $g(t) = x_2 e^{\lambda t}$.)

Dann gilt:

$$F'(t) = \lambda e^{\lambda t} X.$$

Wenn wir in die Differentialgleichung einsetzen, bekommen wir die Gleichung:

$$\lambda e^{\lambda t} X = A e^{\lambda t} X$$

oder

$$AX = \lambda X$$

d.h. ein Eigenwertproblem.

Um den Weg zu einer allgemeinen Theorie vorzubereiten, werden wir versuchen, dieses Eigenwertproblem zu lösen: d.h. wir suchen λ, X sodaß

$$AX = \lambda X.$$

Wir können diese Gleichung forgendermaßenm umschreiben:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

d.h. X ist eine (nicht-triviale) Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)X = 0 \qquad (**)$$

Aus der Theorie der Gleichungssysteme wissen wir, daß $(**)$ nur dann nicht-triviale Lösungen hat, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$, d.h. λ ist eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

d.h. $(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$
d.h. $6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$
d.h. $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$
d.h. $\lambda = 1$ oder $\lambda = 4$.

Um die Eigenvektoren zu bestimen, lösen wir die entsprechenden homogenen Gleichungen:

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

d.h. $x_1 = -x_2$. (Z.B. ist $(-1, 1)$ ein Eigenvektor.)

$$\lambda = 4: \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

d.h. $x_1 = 2x_2$. (Z.B. ist $(2, 1)$ ein Eigenvektor.)

Die Lösung ist dann

$$f(t) = -c_1 e^t + 2c_2 e^{3t}, \quad g(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}.$$

Satz: Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) λ ist Eigenwert von A, d.h. es gibt $X \neq 0$ mit $AX = \lambda X$.
2) Die Matrix $(A - \lambda I)$ ist nicht invertierbar.
3) λ ist eine Lösung der Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$.
(N.B. dies ist eine Polynomgleichung n-ten Grades.)

Beweis: 1) bedeutet, daß die homogene Gleichung $(A - \lambda I)X = 0$ eine nicht-triviale Lösung hat und wir wissen, daß dies zu Bedingung 2) bzw. 3) äquivalent ist.

Aus diesem einfachen Satz können wir sofort eine Reihe interessanter Aussagen gewinnen:
1) A hat höchstens n Eigenwerte;
2) A hat mindestens einen Eigenwert, falls n ungerade ist.
3) Falls A dreieckig ist, dann sind die Diagonalelemente die Eigenwerte.
Denn

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} - \lambda & \\ vdots & & \\ 0 & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$$

mit Nullstellen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Da die Funktion

$$\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$$

eine besondere Bedeutung für die Eigenschaften von A besitzt, geben wir ihr einen eigenen Namen – die **charakteristische Funktion** von A (oder **charakteristisches Polynom**) – geschrieben χ_A.

Beispiel: Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist

$$
\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2-1)-(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(\lambda-3)\lambda
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen sind
$\lambda = 0$ mit Eigenvektor $(1,1,1)$
$\lambda = 1$ mit Eigenvektor $(1,0,-1)$
$\lambda = 3$ mit Eigenvektor $(1,-2,1)$

Die Eigenvektoren eines Operators liefern besonders einfachen Matrizendarstellungen.

Satz: Sei f ein Operator in $L(V)$ mit n linearunabhängigen Eigenwerten $(x_1,\ldots,x_n)$ wobei $n = \dim V$. Dann ist die Matrix von f bzgl. $(x_1,\ldots,x_n)$

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),$$

wobei $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ die entsprechenden Eigenwerte sind.

Die entsprechende Aussage über Matrizen ist:

Satz: Sei A eine $n\times n$ Matrix mit n linear unabhängigen Eigenvektoren $X_1,\ldots,X_n$. Sei S die Matrix

$$[X_1,\ldots,X_n].$$

Dann gilt:

$$S^{-1}A\,S = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

wobei (λ_i) die entsprechenden Eigenwerte sind.

Definition: Eine Matrix A heißt **diagonalisierbar,** falls es eine invertierbare Matrix S gibt, sodaß $S^{-1}A\,S$ eine Diagonalmatrix ist, (d.h. es gibt eine Basis für $\mathbf{R}^n$, sodaß die entsprechende Darstellung für den von A induzierten Operator eine Diagonalmatrix ist).

Den obigen Satz kann man jetzt folgendermaßen formulieren:

Satz: Eine $n\times n$ Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren hat.

Bemerkung: Die Voraussetzung des Satzes ist nicht immer erfüllt. (Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.)$$

Ein wichtiger Fall, wo sie automatisch gilt, ist, wenn A n verschiedene Eigenwerte besitzt.

Satz: Sei A eine $n \times n$ Matrix, mit n-verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und entsprechenden Eigenvektoren $X_1, \dots, X_n$. Dann sind $X_1, \dots, X_n$ linear unabhängig.

Beweis: Falls $X_1, \dots, X_n$ nicht linear unabhängig sind, können wir ein r finden, sodaß $X_1, \dots, X_r$ linear unabängig sind, aber X_{r+1} eine lineare Kombination von $X_1, \dots, X_r$ ist, etwa

$$X_{r+1} = \mu_1 X_1 + \cdots + \mu_r X_r \qquad (A)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_{r+1} X_{r+1} &= A X_{r+1} \\ &= A(\mu_1 X_1 + \cdots + \mu_r X_r) \\ &= \lambda_1 \mu_1 X_1 + \cdots + \lambda_r \mu_r X_r \qquad (B) \end{aligned}$$

Aus (A) und (B) folgt:

$$0 = \mu_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) X_1 + \cdots + \mu_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) X_r$$

d.h. eine nicht-triviale Linearkombination von $X_1, \dots, X_r$ verschwindet – Wiederspruch.

Bemerkung: Wie wir gesehen haben, besitzen A und $S^{-1} A S$ die gleichen Eigenwerte. Daher sind die einzigen möglichen Diagonalisierungen von A Matrizen der Gestalt $\operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, wobei $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ eine **Umnumerierung** der Egenwerte von A ist und ein Wert $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ k-mal vorkommt, wobei

$$k = \dim\{x \colon Ax = \lambda x\}.$$

Beispiel: Wir haben gesehen, daß die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

die Eigenwerte $\{0, 1, 3\}$ mit Eigenvektoren $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(1 - 2, 1)$ besitzt. Daher gilt

$$S^{-1} A S = \operatorname{diag}[0, 1, 3] \quad \text{wobei} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Differenzengleichungen: Eine interessante und nützliche Anwendung dieser Theorie liegt in der Theorie der Differenzengleichungen. Statt eine systematische Darstellung zu geben, werden wir uns mit einem konkreten Beispiel begnügen (die FIBONNACI-schen Zahlen). Gesucht wird eine Folge (F_n) von ganzen zahlen, sodaß

$$F_0 = F_1 = 1, F_2 = F_0 + F_1, \dots, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

(Die ersten Glieder sind: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$).

Sei jetzt X_n die 2×1 Matrix

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$1) \qquad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad 2) X_{n+1} = AX_n \quad \text{wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wie man leicht sieht, gilt dann $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$.

Um X_{n+1} expliziet aurechnen zu können, brauchen wir eine geschlossene Formel für A^{n+1}. Dazu berechnen wir eine Diagonalisierung von A.
Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - \lambda - 1$ mit Nullstellen $\lambda_1 = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}, \lambda_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$.
Die entsprechenden Eigenwektoren sind:

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es gilt daher:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^k = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right).$$

Die Jordansche Normalform:

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar. Hat z.B. A keine Eigenwerte, dann ist sie offenbar nicht diagonalisierbar. Wir möchten diese triviale Möglichkeit vermeiden, indem wir jetzt ausschließlich mit komplexen Matrizen arbeiten. In diesem Fall hat eine $n \times n$ Matrix **immer** n Eigenwerte (eventuell mit Wiederholungen) – die n Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es kann allerdings der Fall sein, daß die entsprechenden Eigenvektoren den Raum nicht aufstpannen.

Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

hat charakteristisches Polynom $(\lambda-\mu)^2$ – also Eigenwerte μ, μ. Die Eigenvektoren sind Vielfache von $(1,0)$. Sie bilden daher keine Basis für $\mathbf{C}^2$.

Das best Ergebnis, das wir erreichen können, ist folgendes:

Satz: Sei A eine komplexe $n\times n$ Matrix mit Eigenwerten

$$\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}_{n_1},\underbrace{\lambda_2,\dots,\lambda_2}_{n_2},\dots,\underbrace{\lambda_r,\dots,\lambda_r}_{n_r}$$

Dann gibt es eine invertierbare $n\times n$ Matrix P, sodaß $P^{-1}AP$ eine Blockdarstellung

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix}$$

besitzt, wobei A_i eine $(n_i\times n_i)$ Matrix der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

ist (die ϵ's sind entweder 0 oder 1 sind).

(D.h.: die Eigenwerte λ_i stehen in der Diagonale: oberhalb steht 0 oder 1 – sonst sind die Elemente null.)

Diese Matrix heißt die **Jordan'sche Normalform** von A. Den Satz kann man folgendermaßen als Satz über lineare Abbildungen formulieren:

Satz: Sei f eine lineare Abbildung in $L(V)$ (V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum). Dann gibt es eine Basis für V, sodaß f eine Matrizendarstellung wie oben besitzt.

Wir bezeichnen eine solche Basis mit

$$x_1^1,\dots,x_{n_1}^1,\quad x_1^2,\dots,x_{n_2}^2,\dots,x_1^r,\dots,x_{n_r}^r$$

Sei V_k der Teilraum, der von $x_1^k,\dots,x_{n_k}^k$ aufgespannt wird.
Dann bildet f V_k in sich selbst und $f|_{V_k}$ hat die Darstellung:

$$\begin{bmatrix} \lambda_k & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Für eine Matrix B der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

gilt die Beziehung:

$$B^r = \begin{bmatrix} \lambda^r & r\lambda^{r-1} & \frac{r(r-1)}{2}\lambda^{r-1} & & \dots \\ 0 & \lambda^r & r\lambda^{r-1} & & \dots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^r \end{bmatrix}$$

Daher folgt:

$$p(B) = \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & p''(\lambda)/2! & & \dots \\ 0 & p(\lambda) & p'(\lambda) & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p(\lambda) \end{bmatrix}$$

für jedes Polynom P.

Insbesondere sehen wir, daß $(B - \lambda I)^n = 0$ oder, in unserer früheren Schreibweise, $(f_k - \lambda_k Id)^{n_k} = 0$ auf V_k.

Daher ist es zunächst naheliegend, Abbildungen $g: V \to V$ zu betrachten, die die Bedingung $g^n = 0$ (für irgendeine natürliche Zahl n) erfüllen. Solche Abbildungen heißen **nilpotent**. Wir suchen eine Basis von V, die eine möglichst einfache Darstellung für g liefert.

Sei r die kleinste Zahl, sodaß $g^r = 0$. Dann sind die Vektoren $x_1, g(x_1), \dots, g^{r-1}(x_1)$ linear unabhängig, wobei $x_1 \in V$ die Eigenschaften $g^r x_1 = 0$, $g^{r-1}x_1 \neq 0$ besitzt. (Gibt es eine größte Zahl k, sodaß $g^k x_1$ von $g^{k+1}x_1, \dots, g^{r-1}x_1$ linear abhängig ist d.h. es gibt $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{r-1}$, sodaß

$$g^k(x_1) = \lambda_{k+1} g^{k+1}(x_1) + \dots + \lambda_{r-1} g^{r-1}(x_1)$$

Dann gilt:

$$g^{r-1}(x_1) = g^{r-k-1}(g^k(x_1)) = \lambda_{k+1} g^r(x_1) + \dots + \lambda_{r-1} g^{2r-k-2}(x_1) = 0$$

(Wiederspruch!)

Es gibt zwei Möglichkeiten:
I. $(x_1, gx_1, \dots, g^{r-1}x_1)$ ist eine Basis für V. Dann hat g die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

bzgl. der Basis $(y_1, \ldots, y_{r-1})$ wobei $y_1 = g^{r-1}x_1, \ldots, y_{r-1} = x_1$.

II. $V_1 := [x_1, gx_1, \ldots, g^{r-1}x_1] \neq V$. Dann gibt es für jedes $y \in V \setminus V_1$ eine ganze Zahl s, sodaß $g^{s-1}y \notin V_1$, $g^s y \in V_1$. Wir wählen ein $y \in V \setminus V_1$, für welches s maximal ist. Es gelte etwa:

$$g^s y = \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j g^j x_1.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 = g^r y = g^{r-s}(g^s y) &= \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j g^{r+r-s} x_1 \\ &= \sum_{j=0}^{s-1} \lambda_j g^{j+r-s} x_1 \end{aligned}$$

Daher gilt: $\lambda_j = 0$, $(j = 0, \ldots, s-1)$ wegen der linearen Unabhängikeit von $x_1, gx_1, \ldots, g^{r-1}x_1$.
Daraus folgt:

$$g^s y = \sum_{j=s}^{r-1} \lambda_j g^j x_1$$

Wir definieren:

$$x_2 := y \sum_{j=s}^{r-1} \lambda_s g^{j-s} x_1.$$

Dann ist $g^s x_2 = 0$ und wiederum sind $\big(x_2, g(x_2), \ldots, g^{s-1}(x_2)\big)$ linear unabhängig.

Sei jetzt V_2 der Teilraum $[x_2, gx_2, \ldots, g^{s-1}x_2]$. Dann gilt:

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

$$V_1 \oplus V_2 \quad \text{ist } g\text{-invariant.}$$

Ein Induktionsbeweis liefert jetzt folgenen Satz:

Satz: Sei $g \in L(V)$ nilpolent. Dann gibt es eine Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_j$$

von V (wobei jedes V_i g-invariant ist), und für jedes $i\,(1 \le i \le j)$ eine Basis für V_i, sodaß $g|_{V_i}$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

besitzt.

Kehren wir jetzt zu unserer ursprünglichen Abbildung f zurück. Wir suchen eine Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

von V, sodaß für jedes i $(f - \lambda_i Id)$ V_i nilpotent ist. D.h. V_i ist der Kern von einer gewissen Potenz von $(f - \lambda_i Id)$. Wir beginnen mit einigen einfachen Bemerkungen.

1) Sei $\lambda \in \mathbf{C}$, $f \in L(V)$. Es ist klar, daß

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda Id) \subseteq \mathrm{Ker}(f \lambda Id)^2 \subseteq \dots$$

Daher gibt es ein kleinstes r, sodaß

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^r = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^{r+1}.$$

Dann gilt $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^{r+m} = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^r \quad (m \in \mathbf{N})$.
Für dieses r gilt:

$$V = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^r \oplus \mathrm{Im}(f - \lambda Id)^r.$$

Denn $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^r + dim\, \mathrm{Im}(f - \lambda Id)^r = n$ und $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id)^r \cap \mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{Id})^r = \{0\}$. (Sei $y = (f - \lambda \mathrm{Id})^r x, y \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^r$. D.h. $(f - \lambda \mathrm{Id})^{2r} = 0$ d.h. $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^{2r} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^r$ d.h. $y = 0$.)

Bemerken wir, daß $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, Id)^r \neq \{0\}$ ganau dann, wenn λ ein Eigenwert ist, so haben wir folgendes Zwischenresultat bewiesen.

Satz: Seien die Eigenwerte von f, $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ mit Vielfachheiten $n_1, \dots, n_j$. Dann gibt es eine Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_j$$

von V, sodaß
1) jedes V_i ist f invariant;
2) $\dim V_i = n_i$
3) $(f - \lambda_i Id)^{n_i}|_{V_i} = 0$.

Damit haben wir die Existenz einer Jordanschen Normalform nachgewiesen. Denn zunächst konstruieren wir eine Zerlegung $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, sodaß $(f - \lambda_i Id)|_{V_i}$ nilpotent ist. Wenden wir das Ergebnis über nilpotente Abbildungen auf $(f - \lambda_i Id)|_{V_i}$ an, so bekommen wir eine Basis $\{x_1^i, \dots, x_{n_i}^i\}$ für V_i, sodaß die Matrix von $(f - \lambda_i Id)|V_i$ die Gestalt

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

hat, d.h. die Matrix von $f|_{V_i}$ ist

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \dots & 0 \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Man sieht dann, daß die Matrix von f bzgl. der Basis $\{x_1^1, \dots, x_{n_1}^1, \dots, x_{n_r}^r\}$ die gewünschte Gestalt hat.

Als Anwendung beweisen wir den:

Satz von CAYLEY-HAMILTON: Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann gilt $\chi_A(A) = 0$, wobei $\chi_A : \lambda \mapsto \det(A - \lambda I)$ das charakteristische Polynom von A ist.

Beweis: Sei $\tilde{A}$ die Jordansche Normalform von A etwa

$$\tilde{A} = S^{-1} A\, S$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{A}}(\lambda) &= (\tilde{A} - \lambda I) \\ &= (S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S) \\ &= \det S^{-1}(A - \lambda I)S \\ &= \det(A - \lambda I) \\ &= \chi_A(\lambda). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für jedes k

$$S^{-1}A^kS = (S^{-1}AS)^k = \tilde{A}^k$$

also

$$\begin{aligned} S^{-1}p(A)S &= p(\tilde{A}) \quad \text{für jedes Polynom, insbesondere} \\ S^{-1}\chi_A(A)S &= \chi_{\tilde{A}}(\tilde{A}). \end{aligned}$$

Es genügt daher, den Satz für die Jordansche Normalform

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & A_r \end{bmatrix}$$

zu beweisen wobei A_i eine $n_i \times n_i$ Matrix mit $(A_i - \lambda_i I)^{n_i} = 0$ ist.
$\chi_{\tilde{A}}$ hat die Faktorisierung

$$\chi_{\tilde{A}}(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}.$$

$$\chi_{\tilde{A}}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} \chi_{\tilde{A}}(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi_{\tilde{A}}(A_2) & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \chi_{\tilde{A}}(A_r) \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{A}}(A_i) &= (A_i - \lambda_i I)^{n_i} \prod_{j \neq i} (A_j - \lambda_j I)^{n_j} \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Bespiel: Sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Die charakteristische Funktion ist

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Es gilt:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 8 & -10 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} \rho & \rho & \rho \\ 2 & -3 & 4 \\ 8 & -10 & 13 \\ 26 & -31 & 42 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(A) = -A^3 + 4A^2 - 3A + 2I = 0.$$

Mit Hilfe des Caley-Hamilton Satzes kann man wertvolle Rekurionsformeln für höhere Potenz von A entwicklen. Z.B. für A wie oben gilt:

$$A^3 = 4A^2 - 3A + 2I_3$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A^4 &= 4A^3 - 3A^2 + 2A = 16A^2 - 12A + 8I_3 - 3A^2 + 2A \\ &= 13A^2 - 10A + 8I_3 \end{aligned}$$

Ähnlicherweise kann man die Inverse einer Matrix ausrechnen.

Denn sei

$$\chi_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n$$

wobei $a_0 = \det A \neq 0$.

Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{(-1)}{\det A}\big(a_1 I + a_2 A + \cdots + (-1)^n A^{n-1}\big).$$

Z.B., für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ist} \quad \chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{2}(-A^2 + 4A - 2I) \\ &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 8 & -10 & 13 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$