Wintersemester 2014/15
Prof. A. Hinrichs, C. Auer, F. Buchegger, R. Kritzinger, H. Laimer

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 für Bachelor Mechatronik

4. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 03/05.11.2014

Aufgabe 13 **Trennung der Variablen III**

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen:

(a) $y'(x) = 2xy(x) + x,\ y(0) = 1$

(b) $y'(x) - y(x)\tan(x) = 2,\ y(0) = 42$

Hinweis: (b) ist nicht direkt trennbar. Betrachten Sie für eine Lösung y von $y'(x)-y(x)\tan(x) = 2$ die Funktion $z(x) = y(x) - 2\tan(x)$ und zeigen Sie, dass $z(x)$ dann die Differentialgleichung $z'(x) - z(x)\tan(x) = 0$ erfüllt. Diese ist trennbar.

Aufgabe 14 **Satz von Picard-Lindelöf**

Wir betrachten das Anfangswertproblem $x'(t) = t^2 + tx(t)^2$, $x(0) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die rechte Seite $f(t,x) = t^2 + tx^2$ im Rechteck

$$Q_{1,1} := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in [0,1], |x| \leq 1\}$$

stetig ist und eine Lipschitzbedingung wie im Satz von Picard-Lindelöf mit $L = 2$ erfüllt.

(b) Folgern Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung im Intervall $[0,\alpha]$. Wie groß ist α?

Aufgabe 15 **Sukzessive Approximation**

Wir betrachten weiter das Anfangswertproblem $x'(t) = t^2 + tx(t)^2$, $x(0) = 0$.

(a) Bestimmen Sie ausgehend von $\phi_0(t) = 0$ sukzessive die Approximationen ϕ_n für $n = 1, 2, 3$.

(b) Welche Fehlerabschätzungen liefert der Satz von Picard-Lindelöf für die Differenzen $\phi_n(1) - x(1)$?

Aufgabe 16 **Alles Zusammen**

Wir betrachten das Anfangswertproblem $x'(t) = (t+2)x(t)$, $x(0) = 1$.

(a) Bestimmen Sie ein Lösungsintervall I ausgehend von $u = v = 1$.

(b) Berechnen Sie $\phi_1(t), \phi_2(t)$ mit der Methode der sukzessiven Approximation.

(c) Schätzen Sie die Fehler von $\phi_1(t), \phi_2(t)$ auf dem Lösungsintervall I ab.

(d) Berechnen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.

(e) Vergleichen Sie die Näherungen $\phi_1(t), \phi_2(t)$ für $t = \frac{1}{6}$ mit der exakten Lösung. Vergleichen Sie die tatsächlichen Fehler mit der Abschätzung aus (c).