

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 für Bachelor Mechatronik

5. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 10./12.11.2014

AUFGABE 17 Noch ein Anfangswertproblem

Wir betrachten das Anfangswertproblem $x'(t) = x^3$, $x(1) = \frac{1}{2}$.

- Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems. Auf welchem Intervall ist die Lösung definiert?
- Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit variabler Anfangsbedingung $x(1) = x_0$.

AUFGABE 18 Fehlerfortpflanzung und Übertragungsmatrix I

Wir betrachten weiter das Anfangswertproblem $x'(t) = x^3$, $x(1) = \frac{1}{2}$.

- Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix.
- Berechnen Sie näherungsweise den Fehler, wenn der Anfangswert $x(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{100}$ statt $x(1) = \frac{1}{2}$ ist. Vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler für $t = 2$.

AUFGABE 19 Ein lineares Differentialgleichungssystem

Wir betrachten das folgende Differentialgleichungssystem 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= \frac{1}{t}x_1(t) + \frac{2}{t}x_2(t) \\x_2'(t) &= -\frac{1}{t}x_1(t) - \frac{2}{t}x_2(t).\end{aligned}$$

- Zeigen Sie, dass

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

Lösungen des Differentialgleichungssystems sind. Leiten Sie daraus ab, dass

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \frac{b}{t} \\ -\frac{a}{2} - \frac{b}{t} \end{pmatrix}$$

mit Konstanten a, b die allgemeine Lösung ist.

- Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangsbedingungen $x_1(1) = 1, x_2(1) = 1$.

AUFGABE 20 Fehlerfortpflanzung und Übertragungsmatrix II

Wir betrachten weiter das Differentialgleichungssystem aus Aufgabe 19.

- (a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit variablen Anfangsbedingungen $x_1(1) = x_1, x_2(1) = x_2$.
- (b) Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix.
- (c) Bestimmen Sie näherungsweise den Fehler für $x_1 = 1 + \delta_1, x_2 = 1 + \delta_2$ in Abhängigkeit von t .