

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 für Bachelor Mechatronik

11. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 19./21.01.2015

AUFGABE 41 Trapezverfahren

Wir betrachten das Runge-Kutta-Verfahren mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_{k-1}, x_{k-1}) \\ k_2 &= f\left(t_{k-1} + h, x_{k-1} + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\right) \\ x_k &= x_{k-1} + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \end{aligned}$$

das sogenannte Trapezverfahren.

- Wieviele Stufen hat dieses Verfahren?
- Ist es explizit oder implizit?
- Schreiben Sie das Butcher-Tableau für dieses Verfahren auf.

AUFGABE 42 Butcher-Tableau

Gegeben sei das folgende Butcher-Tableau.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

Schreiben Sie das dazugehörige Runge-Kutta Verfahren auf.

AUFGABE 43 Explizite Einschrittverfahren - Vergleich

Überlegen Sie sich, dass der folgende MATHEMATICA-Code das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (RK4) für das Anfangswertproblem $x' = t^2 + x$, $x(0) = 1$ implementiert und eine Näherung für $x(1)$ ausgibt. Für die exakte Lösung vergleichen Sie mit Aufgabe 9.

```
Clear[x, h] (*RK4*)
h = 0.001; steps = 1000; (*Schrittweite und Schrittzahl*)
f[t_, x_] := t^2 + x (*Funktion für rechte Seite*)
{t0, x0} = {0, 1}; (*Anfangswerte*)
x[0] = x0;
Do[k1 = f[t0 + h k, x[k]];
```

```

k2 = f[t0 + h (k + 1/2), x[k] + h k1/2];
k3 = f[t0 + h (k + 1/2), x[k] + h k2/2];
k4 = f[t0 + h (k + 1), x[k] + h k3];
x[k + 1] = x[k] + h/6*(k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4), {k, 0, steps - 1}]
x[steps]

```

- (a) Wo stehen die Koeffizienten des Butcher-Tableaus?
- (b) Modifizieren Sie den Code, so dass das Eulerverfahren und das explizite Heunverfahren implementiert werden.
- (c) Vergleichen Sie die Fehler zur korrekten Lösung für die Schrittweiten 0.1, 0.01 und 0.001 für alle drei Verfahren.

AUFGABE 44 Ordnung

Wir betrachten weiter das Verfahren aus Aufgabe 42.

- (a) Implementieren Sie dieses Verfahren in MATHEMATICA.
- (b) Vergleichen Sie die Fehler zur korrekten Lösung für die Schrittweiten 0.1, 0.01 und 0.001 mit denen des Eulerverfahrens, des Heun-Verfahrens und des RK4.
- (c) Formulieren Sie eine Vermutung über die Ordnung dieses Verfahrens.
- (d) Beweisen Sie diese Vermutung (Hinweis: Taylorentwicklung). Es genügt, wenn Sie den Beweis für Differentialgleichungen (statt allgemeiner für Systeme) führen.