Wintersemester 2014/15
Prof. A. Hinrichs, C. Auer, F. Buchegger, R. Kritzinger, H. Laimer

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 für Bachelor Mechatronik

12. (und letzte) Serie

Ankreuzen vor der Übung am 26./28.01.2015

Aufgabe 45 **Klassifikation partieller Differentialgleichungen**

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen

(a) Telegrafengleichung ($C, L > 0$)

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) - LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) - (RC + LG)\frac{\partial i}{\partial t}(x,t) - RGi(x,t) = 0.$$

(b) allgemeine Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) - a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) - a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y,t) - a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t) + b_1\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) + b_2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,t) = 0.$$

(c) Gesetz für Druckschwankungen in einem homogenen, sich selbst überlassenen Medium

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,y,z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,z,t) = 0.$$

Geben Sie, wenn möglich, die Matrix der Koeffizientenfunktionen $A = (a_{ij})$ und die Koeffizienten a_i, a_0 an, und bestimmen Sie den Typ der DGL.

Aufgabe 46 **Eine harmonische Funktion**

Gegeben sei die Funktion $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Zeigen Sie, daß

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ gilt.

Aufgabe 47 Mathematica-**Befehl** `NDSolve`

Bestimmen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0 & (x,y) &\in (0,1)^2,\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) &= 0 & x &\in (0,1),\\
u(1,y) &= 1 & y &\in (0,1),\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) &= 1 & y &\in (0,1)
\end{aligned}$$

mit Hilfe des MATHEMATICA-Befehls `NDSolve` und plotten Sie die Lösung mit dem Befehl `Plot3D`. Lesen Sie die analytische Lösung aus dem Graph der Funktion ab und verifizieren Sie diese. Experimentieren Sie mit den Randbedingungen, um interessantere Lösungen zu erhalten.

Aufgabe 48 **Formel von d'Alembert**

Berechnen Sie die Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ mit Anfangswerten

$$u(x,0) = x^2 - 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1$$

nach der Formel von d'Alembert. Bestätigen Sie durch eine Probe, dass Ihre berechnete Funktion tatsächlich Lösung des Anfangswertproblems ist.