

---

# Analysis 1

---

## Vorlesungsnotizen



JOHANNES KEPLER  
UNIVERSITÄT LINZ | JKU

Johannes Kepler Universität Linz  
Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
Institut für Analysis

Prof. Dr. Aicke Hinrichs  
Wintersemester 2015/16  
Version vom 27. Januar 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mengen, Logik, Funktionen – Die Sprache der Mathematik</b>	<b>1</b>
1.1	Mengen . . . . .	1
1.2	Logik . . . . .	3
1.3	Relationen und Funktionen . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Zahlen</b>	<b>14</b>
2.1	Die Axiomatik der reellen Zahlen - Algebra . . . . .	14
2.2	Die Axiomatik der reellen Zahlen - Ordnung . . . . .	17
2.3	Die natürlichen Zahlen . . . . .	20
2.4	Die Axiomatik der reellen Zahlen - Vollständigkeit . . . . .	25
2.5	Die komplexen Zahlen . . . . .	29
2.6	Endlichkeit, Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Folgen</b>	<b>36</b>
3.1	Der Folgenbegriff und Konvergenz . . . . .	36
3.2	Monotone Folgen . . . . .	43
3.3	Teilfolgen, Satz von Bolzano-Weierstraß . . . . .	45
3.4	Cauchyfolgen . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Reihen</b>	<b>49</b>
4.1	Der Reihenbegriff, Konvergenz und Eigenschaften . . . . .	49
4.2	Absolute Konvergenz und Konvergenzkriterien . . . . .	53
4.3	Alternierende Reihen und Leibniz-Kriterium . . . . .	56
4.4	Reihen mit beliebigen Indexmengen, Umordnungssatz und Cauchy-Produkt . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Stetige Funktionen</b>	<b>60</b>
5.1	Reelle Funktionen, algebraische Operationen, Ordnung . . . . .	60
5.2	Stetigkeit - Definition, Charakterisierung, grundlegende Sätze . . . . .	60
5.3	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	66
5.4	Zwischenwertsatz und Satz vom Maximum und Minimum . . . . .	71
5.5	Elementare Funktionen . . . . .	73
5.5.1	Exponentialfunktion . . . . .	73
5.5.2	Potenzfunktion . . . . .	75
5.5.3	Logarithmusfunktion . . . . .	76
5.5.4	Trigonometrische Funktionen . . . . .	77
5.5.5	Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen . . . . .	79
5.5.6	Hyperbelfunktionen . . . . .	80

---

<b>6</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>81</b>
6.1	Der Ableitungsbegriff . . . . .	81
6.2	Differentiationsregeln . . . . .	83
6.3	Lokale Extrema und Mittelwertsatz . . . . .	85
6.4	Höhere Ableitungen, Taylorsche Formel und Taylorreihen . . . . .	87
6.5	Monotonie und Konvexität . . . . .	90
6.6	Extrema und Wendepunkte . . . . .	91
6.7	Die Regel von l'Hospital . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>93</b>
7.1	Stammfunktionen und unbestimmte Integrale . . . . .	93
7.2	Das Riemann-Integral . . . . .	99
7.3	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	102
7.4	Uneigentliche Integrale . . . . .	105
7.5	Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	108

# 1 Mengen, Logik, Funktionen – Die Sprache der Mathematik

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Sprache der Mathematik vertraut machen. Einiges davon werden Sie auch in anderen Grundvorlesungen ähnlich hören. Da dies aber die Grundlage für alle Mathematikvorlesungen sein wird, schadet ein wenig Wiederholung nicht.

Zunächst werden wir uns mit den grundlegenden Objekten der Mathematik beschäftigen - mit Mengen und ihren Elementen. Anschließend schauen wir uns ein wenig Logik an - wie schließt man logisch korrekt, um mathematische Tatsachen nachzuweisen. Schließlich geht es um den allgemeinen Funktionsbegriff, der ebenfalls für die ganze Mathematik wichtig ist und funktionale Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen erfasst.

## 1.1 Mengen

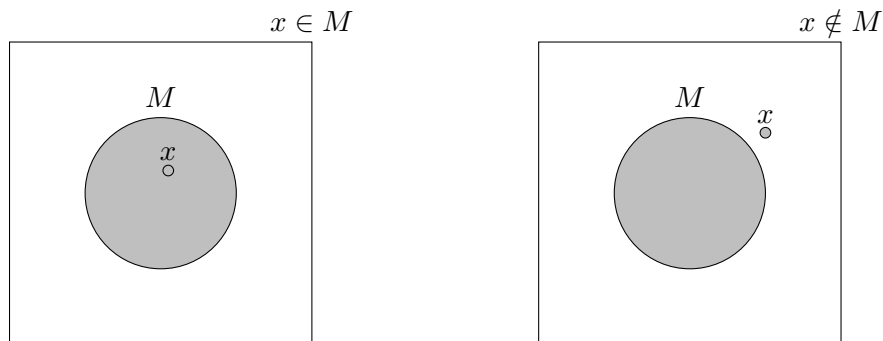
### Naiver Mengenbegriff nach Georg Cantor (1845 – 1918, Begründer der Mengenlehre)

Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die *Elemente* von  $M$  genannt werden, zu einem Ganzen.

Wir benutzen also eine (letztlich undefinierte, aber intuitive) Beziehung zwischen zwei mathematischen Objekten  $x$  und  $M$ :

$x$  ist Element der Menge  $M$ , kurz  $x \in M$ .

Ist  $x$  kein Element der Menge  $M$ , schreiben wir  $x \notin M$ .



### Mengen von Zahlen - Bezeichnungen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  ist die Menge der *natürlichen Zahlen*
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  ist die Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$  ist die Menge der *ganzen Zahlen*
- $\mathbb{Q}$  ist die Menge der *rationalen Zahlen*
- $\mathbb{R}$  ist die Menge der *reellen Zahlen*

### Definition von Mengen durch ...

#### ... Aufzählung aller Elemente:

- $M := \{0, 17, 42\}$
- $N := \{\text{Ewald, Florian, Mario, Andreas, Erich}\}$

... **Pünktchen:**

- $G := \{2, 4, 6, \dots\}$

... **Eigenschaft:**

- $P := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist Primzahl}\}$
- $G := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\}$
- $U := \{u \in N : u \text{ ist Übungsleiter}\}$

Eine besondere Menge ist die *leere Menge*  $\emptyset$ , die kein Element enthält. Diese Menge ist eindeutig bestimmt.

Zwischen Mengen können Beziehungen bestehen. Eine Menge  $M$  heißt *Teilmenge* einer Menge  $N$ , wenn jedes Element von  $M$  auch Element von  $N$  ist. Man schreibt dafür  $M \subseteq N$ . Zum Beispiel gilt

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

und in den obigen Beispielen haben wir  $U \subseteq N$ . Für jede Menge  $M$  ist auch  $M \subseteq M$  und  $\emptyset \subseteq M$ ! Eine Teilmenge  $N$  von  $M$  heißt *echte Teilmenge*, falls  $N \neq M$  ist. Man schreibt dann auch  $N \subset M$  oder  $N \subsetneq M$ .

Zwei Mengen  $M$  und  $N$  heißen *gleich* oder *identisch* wenn sie dieselben Elemente enthalten, wenn also  $M \subseteq N$  und  $N \subseteq M$  gilt. Zum Beispiel ist

$$\{0, 17, 42\} = \{42, 0, 17\} = \{0, 17, 0, 42, 17\}.$$

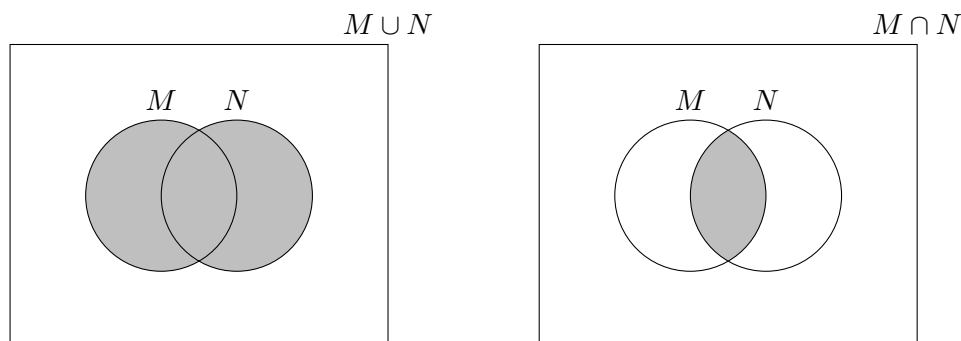
Die *Potenzmenge*  $\mathcal{P}(M)$  einer Menge  $M$  ist die Menge aller Teilmengen von  $M$ . Ihre Elemente sind also selbst Mengen. Zum Beispiel ist

$$\mathcal{P}(\{0, 17, 42\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{17\}, \{42\}, \{0, 17\}, \{0, 42\}, \{17, 42\}, \{0, 17, 42\}\}.$$

Aus Mengen  $M, N$  kann man durch *Mengenoperationen* neue Mengen bilden. Insbesondere sind das ...

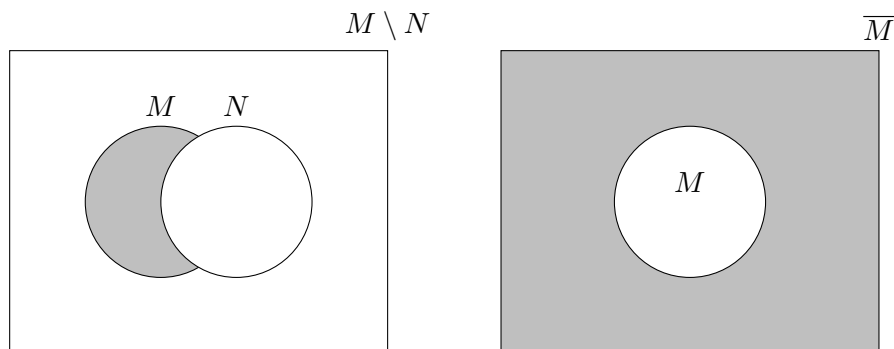
... **die Vereinigung**  $M \cup N$ , die alle Elemente aus  $M$  und alle Elemente aus  $N$  enthält.

... **der Durchschnitt**  $M \cap N$ , der alle Elemente enthält, die sowohl zu  $M$  als auch zu  $N$  gehören.



... die **Differenzmenge**  $M \setminus N$ , die alle Elemente aus  $M$  enthält, die nicht Elemente von  $N$  sind.

Oft hat man auch eine *Grundmenge*  $G$ , von der alle betrachteten Mengen Teilmengen sind. Ist diese Grundmenge fixiert und  $M$  eine solche Teilmenge, schreibt man auch  $\overline{M}$  für  $G \setminus M$  und nennt  $\overline{M}$  die *Komplementärmenge* oder das *Komplement* von  $M$ . Hier muss die Grundmenge aber immer klar sein!



Solche Mengendiagramme nennt man übrigens Venn-Diagramme nach John Venn (1834–1923).

Die zweielementigen Mengen  $\{x, y\}$  und  $\{y, x\}$  sind nach dem oben gesagten identisch. Oft will man aber die Reihenfolge der Elemente unterscheiden. Deshalb bildet man das *geordnete Paar*  $(x, y)$  mit der Vereinbarung, dass  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  dann und nur dann gilt, wenn  $x_1 = x_2$  und  $y_1 = y_2$ . Dann sind also  $(x, y)$  und  $(y, x)$  verschiedene geordnete Paare, falls  $x \neq y$  ist.

ÜBUNG: Man kann geordnete Paare auch rein mengentheoretisch (aber etwas schwerfällig) definieren durch  $(x, y) := \{x, \{x, y\}\}$ . In der Übung soll gezeigt werden, dass dann die Forderung

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2$$

tatsächlich gilt.

Sind nun  $M$  und  $N$  zwei Mengen, so ist das *kartesische Produkt*  $M \times N$  die Menge aller geordneten Paare  $(x, y)$  mit  $x \in M$  und  $y \in N$ .

## 1.2 Logik

Mathematik besteht im wesentlichen aus dem Beweisen von Aussagen aus anderen Aussagen, die man schon als richtig erkannt hat. Grundlage dafür ist ein System von *Axiomen*. Das sind Grundaussagen, die man nicht weiter hinterfragt und als gültig voraussetzt. Im nächsten Kapitel werden wir ein Axiomensystem für reelle Zahlen finden, aus dem dann alle Aussagen der Analysis durch *logisches Folgern* abgeleitet werden können.

Zur axiomatischen Begründung der Mathematik geht man eigentlich noch einen Schritt weiter und benutzt ein Axiomensystem für die Mengenlehre, das System von Zermelo-Fraenkel mit dem Auswahlaxiom. Das ist für uns aber viel zu schwerfällig. Deshalb fangen wir ein Stockwerk höher an.

Trotzdem wollen wir uns kurz mit dem *logischen Folgern* beschäftigen. Keine Angst, eigentlich ist das nur die konsequente Anwendung des gesunden Menschenverstands. In der Mathematik geht es nur um *Aussagen*, die entweder *wahr* oder *falsch* sein können. Sinnvolle Aussagen sind zum Beispiel *29 ist eine Primzahl* oder *jede gerade Zahl größer als 2 ist Summe zweier Primzahlen*

oder  $\sqrt{2}$  ist eine rationale Zahl. Die erste Aussage ist wahr, die dritte ist falsch (was wir noch beweisen werden). Die zweite Aussage ist die *Goldbachsche Vermutung*, ein berühmtes Problem der Zahlentheorie. Ob diese Aussage wahr oder falsch ist, ist trotz großer Bemühungen vieler Mathematiker seit fast 300 Jahren unbekannt.

Aus sinnvollen Aussagen kann man mittels der Operationen *und*, *oder*, *nicht* und *folgt* neue Aussagen bilden.

Sind  $p$  und  $q$  zwei Aussagen, so ist die Aussage  $p$  und  $q$  genau dann wahr, wenn sowohl  $p$  als auch  $q$  wahr sind. Mathematiker schreiben auch  $p \wedge q$  statt  $p$  und  $q$ . Ein Beispiel aus der Umgangssprache ist die Aussage *Ich studiere Mathematik und Biologie*, die genau dann wahr ist, wenn ich sowohl Mathematik als auch Biologie studiere.

Die Aussage  $p$  oder  $q$  ist genau dann wahr, wenn  $p$  oder  $q$  (oder beide) wahr sind. Mathematiker schreiben auch  $p \vee q$  statt  $p$  oder  $q$ . Ein Beispiel aus der Umgangssprache ist die Aussage *Ich studiere Mathematik oder Biologie*. Mathematiker verwenden also *oder* nicht in der Bedeutung des ausschließenden *entweder oder*, die Aussage aus dem letzten Satz ist auch wahr, wenn ich Mathematik und Biologie studiere.

Die Aussage *nicht p* ist einfach das logische Gegenteil der Aussage  $p$ , ist also genau dann wahr, wenn  $p$  falsch ist. Abgekürzt schreibt man auch  $\neg p$ .

Die Aussage *aus p folgt q* kommt in der Mathematik sehr häufig vor. Sie ist immer dann wahr, wenn mit der Wahrheit von  $p$  auch die Wahrheit von  $q$  gilt. Achtung: Sie ist insbesondere auch wahr, wenn  $p$  falsch ist, dafür ist der Wahrheitsgehalt von  $q$  unerheblich! Zum Beispiel ist die Aussage *Wenn der Mond ein gelber Käse ist, dann ist 27 eine Primzahl* eine wahre Aussage. Statt *aus p folgt q* schreibt man auch kurz  $p \Rightarrow q$  und sagt auch  $p$  impliziert  $q$  oder  $p$  ist hinreichend für  $q$  oder  $q$  ist notwendig für  $p$ .

Die Aussagen  $p$  und  $q$  heißen *äquivalent*, kurz  $p \Leftrightarrow q$ , falls  $p$  genau dann wahr ist, wenn  $q$  wahr ist, also falls sowohl  $p \Rightarrow q$  als auch  $q \Rightarrow p$  gilt. Um die Äquivalenz zweier Aussagen zu beweisen, beweist man meist diese beiden Implikationen.

Man kann sich diese Verknüpfungen von Aussagen gut an Wahrheitstabellen klarmachen. In eine solche Tabelle schreibt man zunächst alle möglichen Wahrheitswerte für die Grundaussagen. Dabei steht  $w$  für *die Aussage ist wahr* und  $f$  für *Die Aussage ist falsch*. Anschließend füllt man nach und nach die Spalten für die logischen Verknüpfungen mit den entsprechenden Wahrheitswerten.

Hier ist die Wahrheitstabelle für die Negation:

<b>P</b>	<b>¬P</b>
<i>w</i>	<b>f</b>
<i>f</i>	<b>w</b>

Hier sind Konjunktion (und) und Disjunktion (oder):

<b>P</b>	<b>Q</b>	<b>P ∨ Q</b>	<b>P</b>	<b>Q</b>	<b>P ∧ Q</b>
<i>w</i>	<i>w</i>	<b>w</b>	<i>w</i>	<i>w</i>	<b>w</b>
<i>w</i>	<i>f</i>	<b>w</b>	<i>w</i>	<i>f</i>	<b>f</b>
<i>f</i>	<i>w</i>	<b>w</b>	<i>f</i>	<i>w</i>	<b>f</b>
<i>f</i>	<i>f</i>	<b>f</b>	<i>f</i>	<i>f</i>	<b>f</b>

Hier sind Implikation  $p \Rightarrow q$  und die Aussage  $\neg p \vee q$ .

P	Q	$P \Rightarrow Q$	P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
w	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	f	f	w	w

Man sieht, dass die beiden letzten Spalten in diesen Tabellen die gleichen Wahrheitswerte enthalten. Deshalb finden wir:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Diese Aussage ist immer wahr. Man nennt so eine Aussage auch Tautologie.

Mathematik besteht nun (zumindest formal) darin, mathematische Sätze zu beweisen. Ein mathematischer Satz ist gerade eine Implikation  $p \Rightarrow q$ , wobei man  $p$  *Voraussetzung* und  $q$  *Behauptung* des Satzes nennt. Ein Beispiel ist

**Satz 1.1.** *Ist  $n$  eine natürliche Zahl und ist  $n^2$  gerade, so ist auch  $n$  gerade.*

Hier ist die Voraussetzung  $p$  gerade die Aussage  *$n$  ist eine natürliche Zahl und  $n^2$  ist gerade*, also eine und-Verknüpfung von zwei Aussagen, die Behauptung  $q$  ist  *$n$  ist gerade*. Zu einem mathematischen Satz gehört ein Beweis, der die Wahrheit der Behauptung durch logisches Schließen aus der Wahrheit der Voraussetzung ableitet. Für Satz 1.1 kann man einen Beweis folgendermaßen führen, indem man aus der Schule bekannte einfache Teilbarkeitseigenschaften der natürlichen Zahlen benutzt. Außerdem zeigt dieser Beweis die Methode des Beweises durch *Kontraposition*, den indirekten Beweis: Man nimmt an, dass  $q$  falsch ist und zeigt dann, dass auch  $p$  falsch ist. Falls also  $p$  richtig ist, ist auch  $q$  richtig. Formal ist das die logische Äquivalenz

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Die Wahrheitstabelle zeigt, dass dies tatsächlich eine Tautologie ist.

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	w	f	f	f	w
f	w	f	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

*Beweis von Satz 1.1.* Sei  $n$  ungerade, also in der Form  $n = 2m - 1$  mit einer natürlichen Zahl  $m$  darstellbar. Dann ist

$$n^2 = (2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1$$

ebenfalls ungerade. Ist also  $n^2$  gerade, so ist auch  $n$  gerade.  $\square$



Es gilt auch die Umkehrung der Implikation in Satz 1.1, ist  $n$  gerade, so auch  $n^2$  (Beweis?!). Beide Implikationen liefern

**Satz 1.2.** *Ist  $n$  eine natürliche Zahl, so ist  $n^2$  gerade genau dann, wenn  $n$  gerade ist.*

Neben *Sätzen* und *Beweisen* braucht die mathematische Sprache noch *Definitionen*. Das sind sinnvolle Begriffsbildungen, die erst eine kompakte Darstellung von Mathematik ermöglichen. Wir haben schon eine Reihe von Definitionen kennengelernt, z.B. haben wir eine Abkürzung für die Menge der natürlichen Zahlen eingeführt durch

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Hier heißt der Doppelpunkt *Definitions-doppelpunkt*. Definiert wird das Symbol oder der Begriff, der am Doppelpunkt steht, durch das, was auf der anderen Seite steht. Weitere Definitionen waren die Mengenoperationen und die logischen Operationen. Oft werden wir Definitionen abheben, z.B. so:

**Definition 1.3.** Eine natürliche Zahl heißt *gerade*, wenn sie ohne Rest durch 2 teilbar ist.

oder

**Definition 1.4.** Die Menge  $\mathbb{Q}$  der *rationalen Zahlen* ist gegeben durch

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wir wollen zu guter letzt auch noch den Gebrauch der sogenannten Quantoren *für alle*  $\forall$  und *es gibt ein*  $\exists$  erläutern, der insbesondere später in der Vorlesung viele Formulierungen von Aussagen verkürzt und übersichtlicher macht. Sei  $X$  eine Menge und  $A(x)$  eine Aussage, die für jedes Element  $x \in X$  sinnvoll ist. Man nennt  $A(x)$  auch eine *Aussageform* mit der Grundmenge oder Einsetzungsmenge  $X$ . Noch genauer spricht man von einer *einstelligen* Aussageform, da sie von einer Variablen  $x \in X$  abhängt.

Für ein festes  $x \in X$  kann  $A(x)$  wahr oder falsch sein. Dann schreibt man

$$\forall x \in X : A(x)$$

für die Aussage *Für alle  $x \in X$  gilt die Aussage  $A(x)$*  und

$$\exists x \in X : A(x)$$

für die Aussage *Es gibt ein  $x \in X$ , für das die Aussage  $A(x)$  gilt*. Zum Beispiel kann man die Aussage des Satzes 1.1 nun auch wie folgt formalisieren. Dazu sei für einen natürliche Zahl  $n$  die Aussage  $G(n)$  einfach  *$n$  ist gerade*:

$$\forall n \in \mathbb{N} : G(n^2) \Rightarrow G(n).$$

Die (falsche) Negation dieser Aussage ist offenbar

$$\exists n \in \mathbb{N} : G(n^2) \wedge \neg G(n).$$

Man erhält also die Negation, indem man die Quantoren vertauscht und die Aussage negiert.

Hat man eine *zweistellige* Aussageform  $A(x, y)$  mit Variablen  $x \in X$  und  $y \in Y$ , so kann man nun mit den Quantoren z.B. folgende Aussagen bilden:

$$\forall x \in X \exists y \in Y : A(x, y) \quad \text{und} \quad \exists y \in Y \forall x \in X : A(x, y).$$

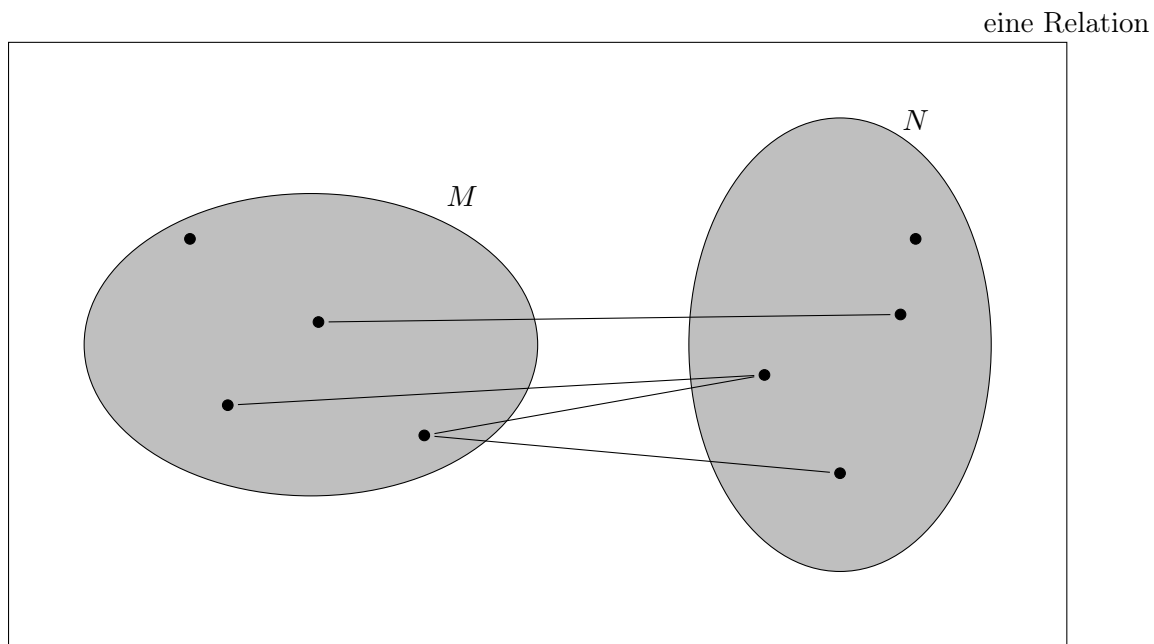
Formulieren Sie diese Aussagen in einem (möglichst einfachen) Satz und machen Sie sich insbesondere klar, dass diese Aussagen nicht äquivalent sind. Wie lauten die Negationen dieser Aussagen?

### 1.3 Relationen und Funktionen

Relationen beschreiben Beziehungen zwischen zwei Mengen. Die Definition ist einfach:

**Definition 1.5.** Eine *Relation*  $R$  zwischen den Mengen  $M$  und  $N$  ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts, also  $R \subseteq M \times N$ .

Man stellt sich das oft so vor, dass einem Element  $x \in M$  das Element  $y \in N$  zugeordnet ist, falls  $(x, y) \in R$  ist. Einem Element  $x$  können dabei auch mehrere  $y$  zugeordnet werden oder auch gar keines.

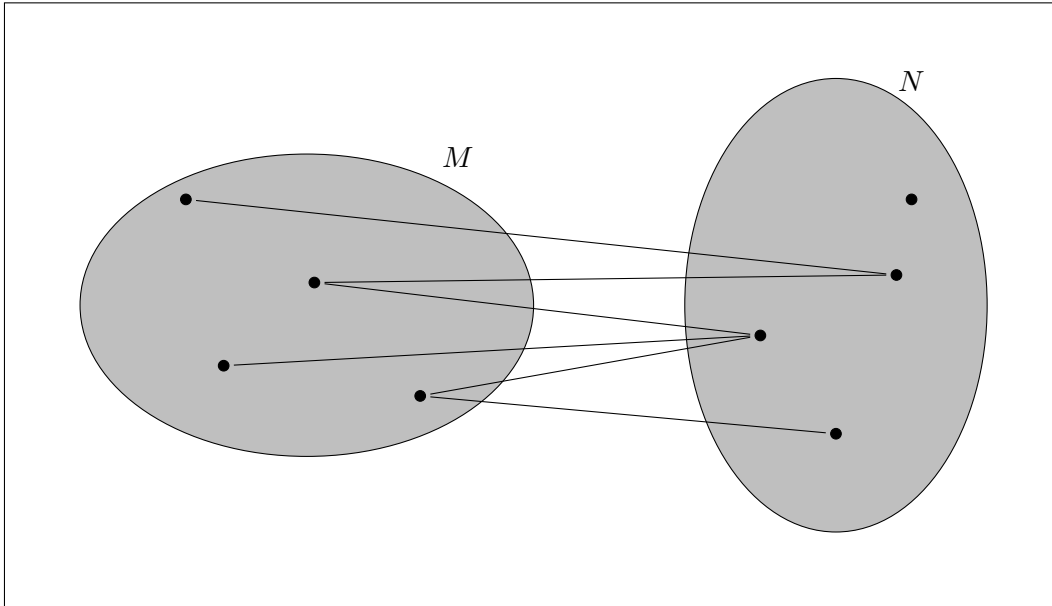


Beispiele sind die *Ordnungsrelationen*  $<, \leq, \geq, >$  der reellen Zahlen, die wir später betrachten werden. So schreibt man z.B. für die *kleiner als*-Relation statt  $(x, y) \in R$  einfach kurz  $x < y$ . Wichtiger für uns an dieser Stelle ist der Begriff der *Funktion*, die ebenfalls eine spezielle Relation ist. Dazu definieren wir zunächst die folgenden Eigenschaften einer Relation. Eine Relation  $R \subseteq M \times N$  heißt

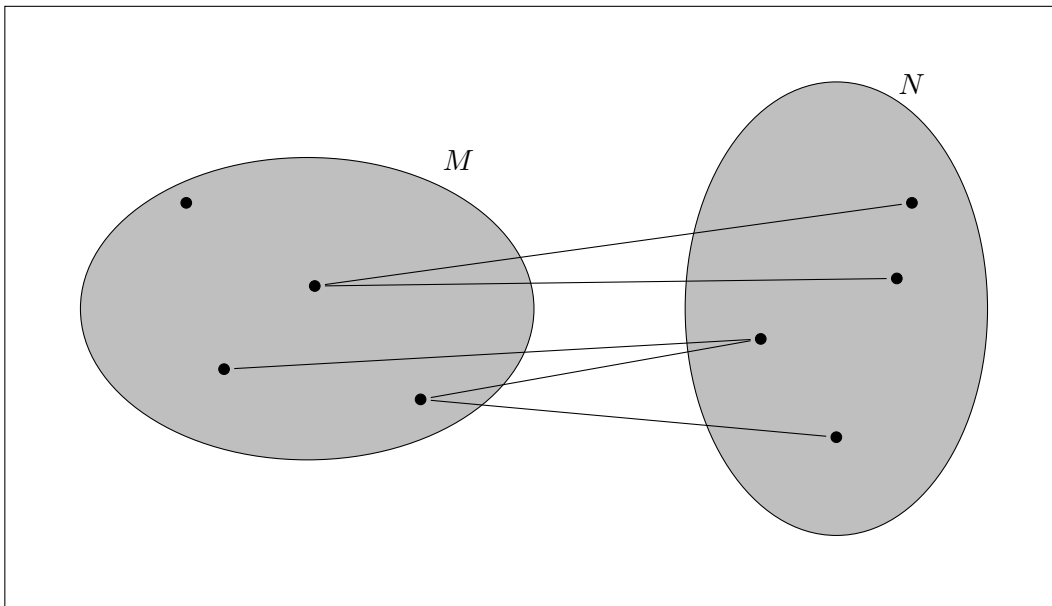
<i>linkstotal</i>	falls	jedes $x \in M$ mindestens einen Partner $y \in N$ hat.
<i>rechtstotal</i> oder <i>surjektiv</i>	falls	jedes $y \in N$ mindestens einen Partner $x \in M$ hat.
<i>linkseindeutig</i> oder <i>injektiv</i>	falls	kein Element $y \in N$ mehr als einen Partner $x \in M$ hat.
<i>rechtseindeutig</i> oder <i>funktional</i>	falls	kein Element $x \in M$ mehr als einen Partner $y \in N$ hat.
<i>eindeutig</i> oder <i>bijektiv</i>	falls	jedes Element $y \in N$ genau einen Partner $x \in M$ hat.

Hier sagen wir kurz:  $x \in M$  hat einen Partner  $y \in N$ , falls  $(x, y) \in R$  ist.

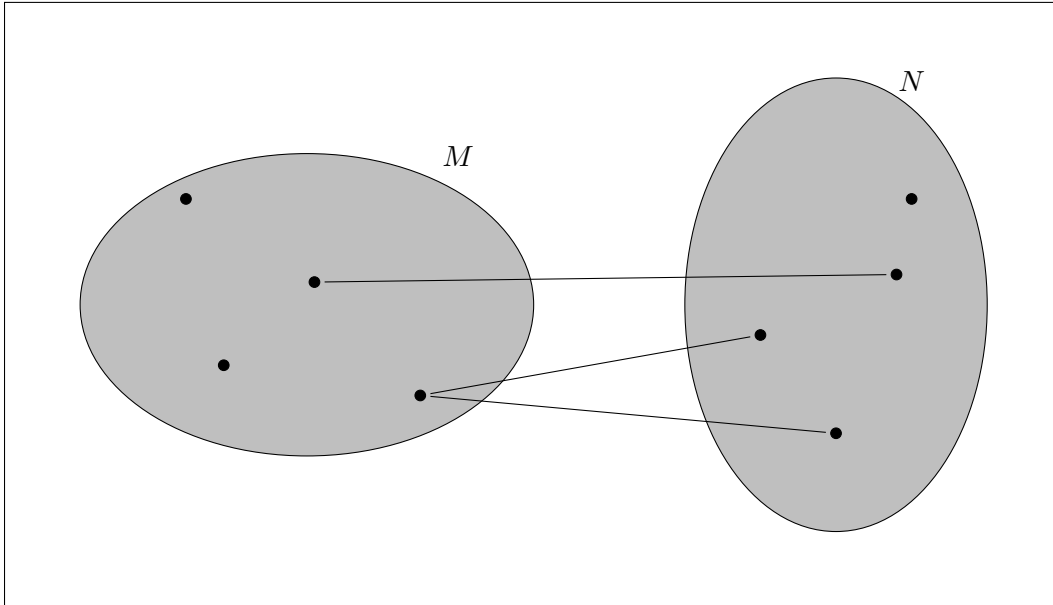
linkstotal



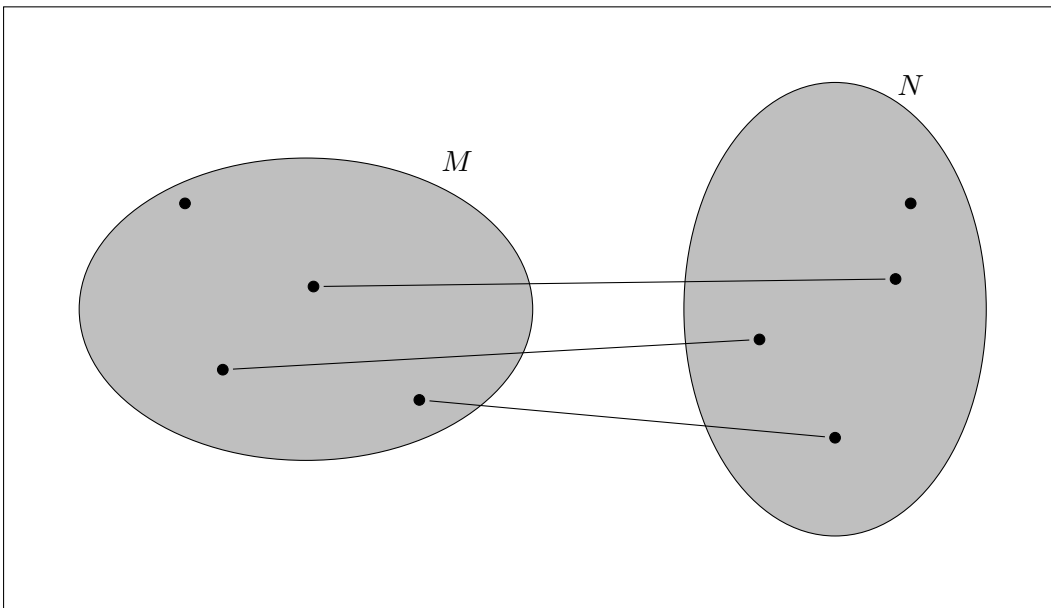
rechtstotal - surjektiv



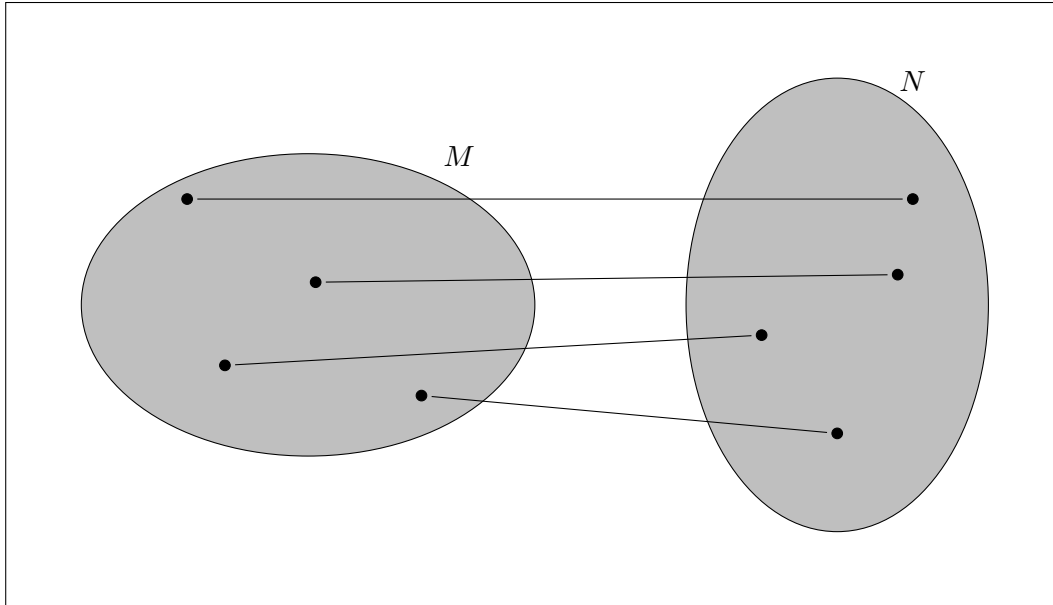
linkseindeutig - injektiv



rechtseindeutig



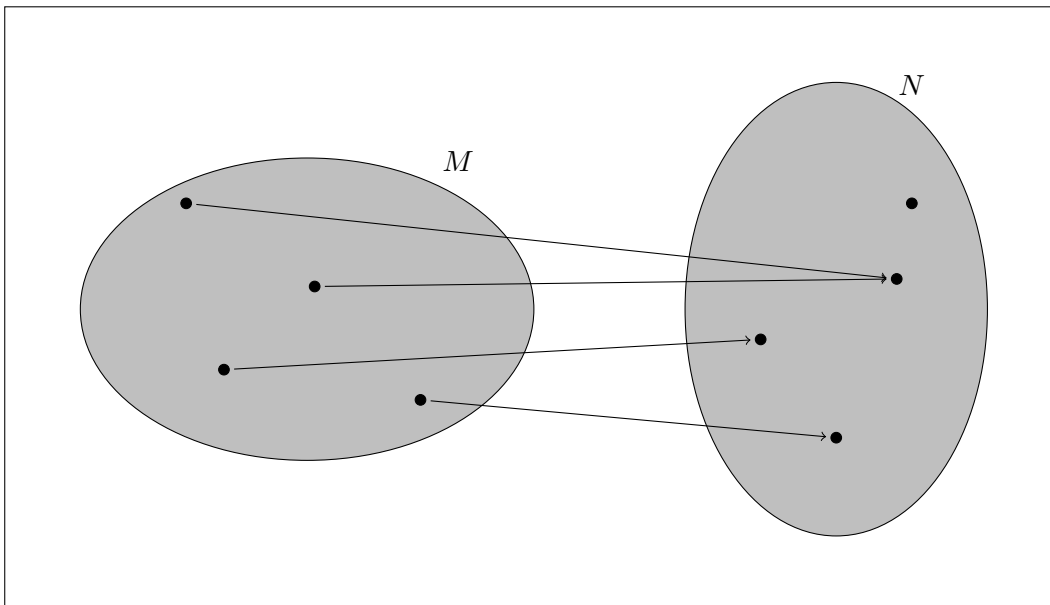
eindeutig - bijektiv



Eine *Funktion* ist eine *linkstotale* und *rechtseindeutige* Relation.

Eine Funktion  $f$  ordnet *jedem* Element  $x \in M$  *genau ein* Element  $y \in N$  zu. Man benutzt dann die suggestivere Schreibweise  $f : M \rightarrow N$  und schreibt  $f(x) = y$ . Die Begriffe *Abbildung* und *Funktion* werden synonym verwendet. Zu einer Funktion gehört also immer auch die Angabe des *Definitionsbereichs*  $M$  und des *Wertebereichs*  $N$ !

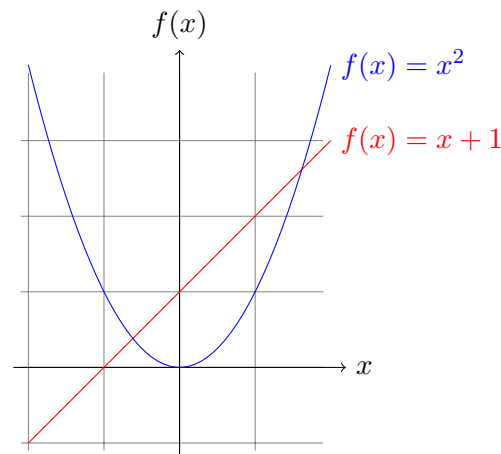
eine Funktion



Die Menge

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times N,$$

nennt man auch den *Graph* der Funktion  $f$ . Ist  $M = N = \mathbb{R}$ , so kann man sich den Graph der Funktion wie üblich als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ , also der Ebene, veranschaulichen.



Eine Funktion ist also per Definition *immer* (rechts)*eindeutig*. Sie heißt *injektiv*, falls aus der Gleichheit der *Funktionswerte*  $f(x_1) = y$  und  $f(x_2) = y$  schon die Gleichheit der *Argumente*  $x_1 = x_2$  folgt. Sie ist *surjektiv*, falls es zu jedem  $y \in N$  ein  $x \in M$  gibt mit  $f(x) = y$ . Sie ist *bijektiv*, falls sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

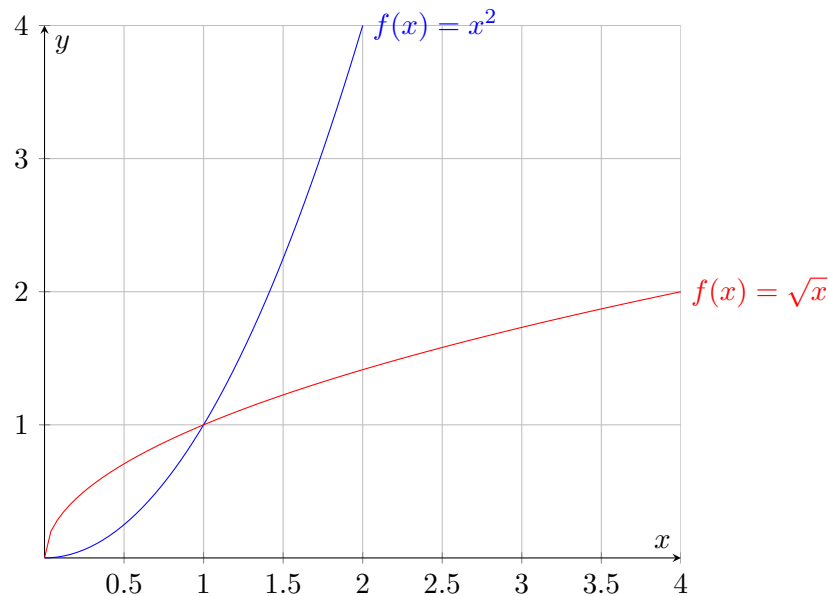
Ist  $f : M \rightarrow N$  bijektiv, so kann man die *inverse Funktion* oder *Umkehrfunktion*  $f^{-1} : N \rightarrow M$  bilden, indem man setzt:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

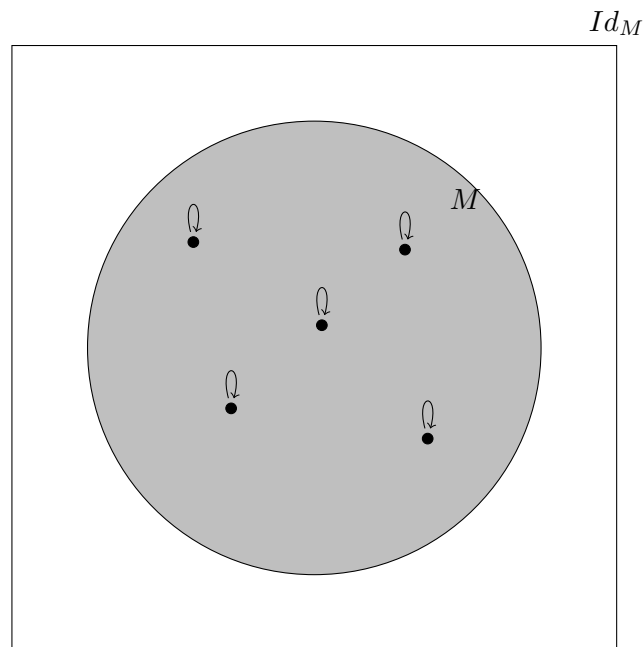
Zum Beispiel ist die Umkehrfunktion der auf den *nichtnegativen reellen Zahlen*

$$\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

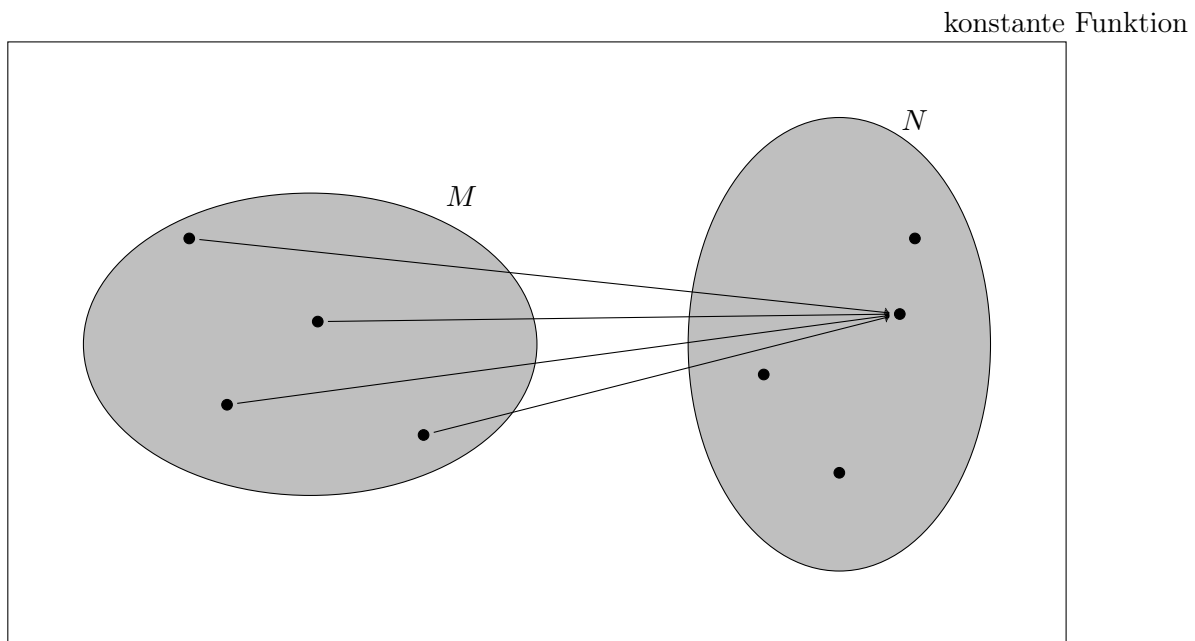
definierten Funktion  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$  die *Quadratwurzelfunktion*  $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto \sqrt{y}$ .



Auf jeder Menge  $M$  gibt es die *identische Funktion*  $Id_M : M \rightarrow M$  gegeben durch  $Id_M(x) = x$  für  $x \in M$ . Jedes Element von  $M$  wird also einfach auf sich selbst abgebildet. Diese Funktion ist bijektiv und ihre Umkehrfunktion ist sie selbst:  $Id_M^{-1} = Id_M$  (tatsächlich?!).



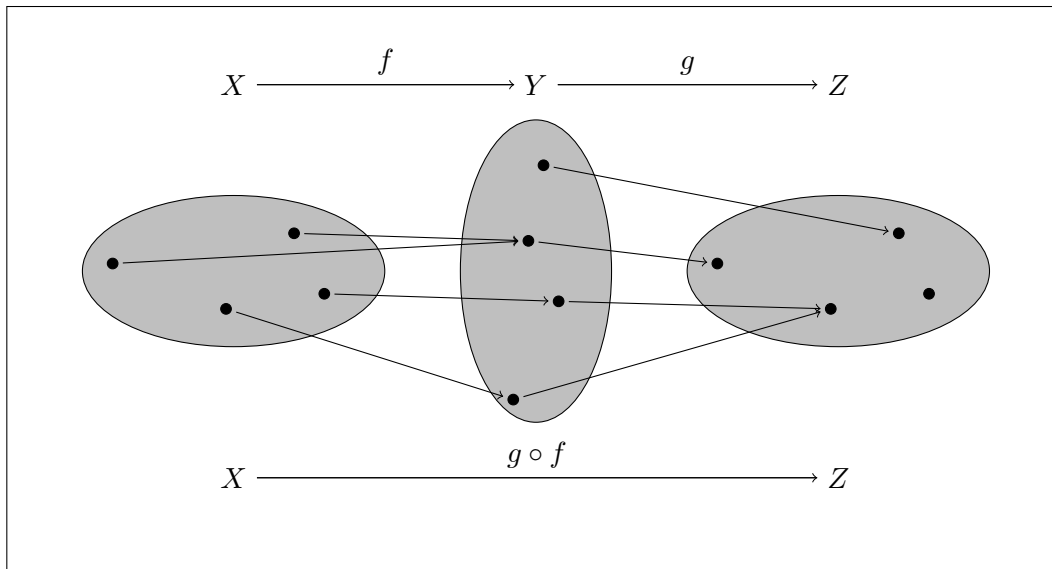
Sind  $M$  und  $N$  beliebige nichtleere Mengen und ist  $y_0 \in N$  ein festes Element, so heißt die Funktion  $f : M \rightarrow N$  mit  $f(x) = y_0$  für alle  $x \in M$  *konstante Funktion*.



Sind  $X, Y, Z$  drei Mengen und  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  zwei Funktionen, so kann man  $g$  und  $f$  hintereinander ausführen und erhält die *Verknüpfung* oder *Komposition*  $g \circ f : X \rightarrow Z$  gegeben durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{für } x \in X.$$

## Komposition



So ist z.B. die Funktion  $h(x) = \sin x^2$  auf  $\mathbb{R}$  die Verknüpfung der Funktionen  $g, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(y) = \sin y$  und  $f(x) = x^2$ . Man erhält  $h = g \circ f$  durch Einsetzen von  $y = f(x) = x^2$  in die Funktion  $g(y)$ .



## 2 Zahlen

In diesem Kapitel werden wir uns mit den für die Analysis interessanten Zahlbereichen der *reellen Zahlen*  $\mathbb{R}$  und der *komplexen Zahlen*  $\mathbb{C}$  beschäftigen. Die reellen Zahlen führen wir *axiomatisch* ein, das heißt wir geben ihnen Struktureigenschaften, die den Bereich der reellen Zahlen eindeutig charakterisieren. Diese Eindeutigkeit werden wir allerdings nicht beweisen.

Aus den Axiomen für die reellen Zahlen leiten wir dann alle anderen Sätze der Vorlesung ab. Insbesondere können wir die *natürlichen Zahlen* innerhalb der reellen Zahlen als *kleinste induktive Menge* erhalten. Insofern unterscheidet sich unser Aufbau der Analysis von einem konstruktiven Aufbau, der von Axiomen der natürlichen Zahlen ausgehend nacheinander die rationalen Zahlen und dann die reellen Zahlen durch sukzessive Erweiterung liefert. Der letzte Zugang ist der für die Schulmathematik natürliche, auch wenn er dort nicht mathematisch stringent durchgeführt werden kann.

Die Einführung der natürlichen Zahlen als induktive Menge gibt uns Gelegenheit, das Beweisverfahren der *vollständigen Induktion* kennenzulernen und zu üben.

### 2.1 Die Axiomatik der reellen Zahlen - Algebra

Mit reellen Zahlen kann man rechnen, das wissen Sie aus der Schule. Dabei gibt es eine Reihe von Rechenregeln - Kommutativgesetze, Assoziativgesetze und das Distributivgesetz. Diese Rechenregeln werden wir natürlich auch als Axiome für unseren axiomatisch begründeten Bereich der reellen Zahlen fordern. Wir gelangen so zum Begriff eines *Körpers*, der die algebraische Struktur der reellen Zahlen fasst.

Dazu betrachten wir zunächst den Begriff einer (*inneren*) *Verknüpfung* bzw. *Operation* auf einer Menge  $X$ , was nur eine andere Bezeichnung für eine Abbildung  $\circ : X \times X \rightarrow X$  ist. Das ist also eine Zuordnung eines Elementes aus  $X$  zu jedem Paar von Elementen aus  $X$ , eine Rechenoperation. Statt  $\circ(x, y)$  schreibt man bei Operationen auch kurz  $x \circ y$ . Das soll natürlich an die Addition  $x + y$  oder die Multiplikation  $xy = x \cdot y$  erinnern.

Wir nennen die Operation  $\circ$  *kommutativ*, falls für alle  $x, y \in X$  die Gleichheit  $x \circ y = y \circ x$  gilt. Sowohl von der Addition als auch von der Multiplikation reeller Zahlen kennen wir diese Regel aus der Schule als Kommutativgesetz der Addition bzw. Multiplikation. Wir werden diese also als Axiom fordern.

Wir nennen die Operation  $\circ$  *assoziativ*, falls für alle  $x, y, z \in X$  die Gleichheit  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$  gilt. Sowohl von der Addition als auch von der Multiplikation reeller Zahlen kennen wir diese Regel aus der Schule als Assoziativgesetz. Wir werden diese also ebenfalls als Axiom fordern. Hat man Assoziativität, so kann man Klammern also einfach weglassen und kurz  $x \circ y \circ z$  schreiben.

Ein Element  $e \in X$  heißt *neutrales Element* oder *Einselement*, falls für alle  $x \in X$  die Gleichung  $x \circ e = e \circ x = x$  gilt. Das neutrale Element ist also *universell* in dem Sinn, dass diese Gleichung für alle  $x \in X$  gelten muss! Ein neutrales Element ist eindeutig bestimmt - es kann nur eines geben. Sind nämlich  $e$  und  $e'$  beide neutral, so folgt aus der Neutralität von  $e$  die Gleichheit  $e' = e \circ e'$ , aus der Neutralität von  $e'$  folgt  $e \circ e' = e$  und beides zusammen liefert  $e = e'$ .

Hat  $\circ$  ein neutrales Element  $e$ , so heißt ein  $y \in X$  *inverses Element* zu  $x \in X$ , falls  $x \circ y = y \circ x = e$  ist. Ist  $\circ$  assoziativ, so sind auch inverse Elemente eindeutig bestimmt. Sind nämlich  $y$  und  $z$  inverse Elemente zu  $x$ , so folgt

$$z = e \circ z = (y \circ x) \circ z = y \circ (x \circ z) = y \circ e = y.$$

Hier haben wir nacheinander die Neutralität von  $e$ , die Inversität von  $y$ , die Assoziativität, die

Inversität von  $z$  und wieder die Neutralität von  $e$  verwendet. Man schreibt dann im allgemeinen  $y = x^{-1}$ , bei der Addition auch  $-x$ , für das zu  $x$  inverse Element. Das inverse Element zu  $x$  ist also *individuell*, für  $x \neq y$  ist im allgemeinen  $x^{-1} \neq y^{-1}$ .

Nun können wir die Axiome eines Körpers zusammenstellen und fordern für die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  kategorisch:

$\mathbb{R}$  IST EIN KÖRPER!

**Definition 2.1.** Ein Körper  $(K, +, \cdot)$  ist eine Menge  $K$  mit zwei Operationen  $+$  (Addition) und  $\cdot$  (Multiplikation) mit den folgenden Eigenschaften:

- (A1) Die Addition ist assoziativ, kommutativ und besitzt ein neutrales Element  $0$ .
- (A2) Zu jedem  $x \in K$  gibt es ein bezüglich der Addition inverses Element  $-x$ .
- (M1) Die Multiplikation ist assoziativ, kommutativ und besitzt ein neutrales Element  $1 \neq 0$ .
- (M2) Zu jedem  $x \in K \setminus \{0\}$  gibt es ein bezüglich der Multiplikation inverses Element  $x^{-1}$ .
- (D) Es gilt das Distributivgesetz, d.h.  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$  für alle  $x, y, z \in K$ . (Punkt- vor Strichrechnung)

Wir überlegen uns zunächst ein paar Beispiele und Nichtbeispiele.

**Beispiel 2.2.** Die aus der Schule „bekannteren“ reellen Zahlen bilden einen Körper.

**Beispiel 2.3.** Die aus der Schule bekannten rationalen Zahlen bilden einen Körper.

**Beispiel 2.4.** Die ganzen Zahlen bilden keinen Körper (welche Eigenschaft ist verletzt?).

**Beispiel 2.5.** Der kleinste Körper ist der Körper  $K = \{0, 1\}$  mit den üblichen Rechenoperationen (also  $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$  und  $1 \cdot 1 = 1$ ) mit Ausnahme der Addition  $1 + 1 = 0$ .

Es gibt also einige verschiedene Körper, in der Übung werden wir weitere kennenlernen. Die später behandelten komplexen Zahlen bilden ebenfalls einen Körper. Die algebraische Struktur bestimmt die reellen Zahlen also noch lange nicht eindeutig.

Beruhigend ist aber, dass sich alle *algebraischen* Rechenregeln, die wir kennen, aus obigen Körperaxiomen ableiten lassen. Damit gelten sie auch *in jedem anderen* Körper. Dies verdeutlicht die Stärke der axiomatischen Methode: man beweist Sätze aus den Axiomen, die man dann in jeder Struktur automatisch hat, sofern diese nur die Axiome erfüllt. Das können durchaus Strukturen sein, an die der Erfinder der Sätze keinesfalls gedacht hat!

Es folgt ein Satz, der eine Reihe von Rechenregeln in einem Körper zusammenfasst. Einige davon werden wir anschließend beweisen, andere sollten Sie sich selbst überlegen.

**Satz 2.6.** Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

- (i) Einmal Null, immer Null: Sind  $x, y \in K$  mit  $x + y = x$ , so ist  $y = 0$ .
- (ii) Einmal Eins, immer Eins: Sind  $x, y \in K$  mit  $x \cdot y = x$  und  $x \neq 0$ , so ist  $y = 1$ .
- (iii) Von Nichts kommt Nichts: Für jedes  $x \in K$  ist  $0 \cdot x = 0$ .
- (iv) Für alle  $x \in K$  ist  $(-1) \cdot x = -x$ .
- (v) Für alle  $x \in K$  mit  $x \neq 0$  ist auch  $x^{-1} \neq 0$ .
- (vi) Doppelt bringt gar nichts: Für  $x \in K$  ist  $-(-x) = x$ .
- (vii) Doppelt bringt gar nichts: Für  $x \in K$  mit  $x \neq 0$  ist  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

*Beweis.* Wir zeigen exemplarisch die Eigenschaften (i) und (iv), die anderen Eigenschaften sollten Sie zur Übung selbst beweisen.

Beim Beweis von (i) setzen wir also voraus, dass wir ein  $x$  und ein  $y$  in  $K$  haben mit  $x + y = x$ . Wir müssen aus den Axiomen ableiten, dass  $y = 0$  ist. Die Idee ist klar, wir müssen auf beiden Seiten  $x$  abziehen. Dies müssen wir mit Hilfe der Axiome realisieren. Mit dem Axiom (A2) finden wir zunächst das zu  $x$  inverse Element  $-x$  und addieren es auf beiden Seiten der Voraussetzung  $x + y = x$ . Dann erhalten wir

$$(-x) + (x + y) = (-x) + x.$$

Nach Definition des inversen Elements ist nun die rechte Seite tatsächlich 0. Die linke Seite formen wir noch so um:

$$(-x) + (x + y) = ((-x) + x) + y = 0 + y = y.$$

Hier haben wir nacheinander angewendet: die Assoziativität der Addition, die Definition des inversen Elements  $-x$ , die Neutralität der 0 für die Addition.

Wir haben diesen Beweis hier in aller Ausführlichkeit aufgeschrieben, um ganz deutlich zu machen, wie die Körperaxiome *in jedem Körper* eine Eigenschaft implizieren, die für Sie für *die reellen Zahlen* schon lange „klar“ ist. Kurz und ohne weitere Erklärungen kann man den Beweis auch so aufschreiben:

$$x + y = x \Rightarrow y = 0 + y = ((-x) + x) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + x = 0.$$

Überlegen Sie sich nochmals, welche Axiome hier in jedem Schritt benutzt wurden! Wo geht die Voraussetzung der Implikation ein?

Den Beweis von (iv) schreiben wir nun nur noch in Kurzform auf: Die Gleichungskette (was benutzen wir hier jeweils?!)

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

zeigt, dass  $(-1) \cdot x$  additives inverses Element zu  $x$  ist. Da  $-x$  per Definition das additive Inverse zu  $x$  ist und inverse Elemente eindeutig bestimmt sind, folgt die Behauptung  $(-1) \cdot x = -x$ .  $\square$

Der obige Satz zeigt also, dass man *in jedem Körper* so rechnen und Gleichungen umstellen kann, wie Sie das von reellen Zahlen gewohnt sind.

## 2.2 Die Axiomatik der reellen Zahlen - Ordnung

Wir haben schon eingesehen, dass es eine ganze Reihe von verschiedenen Körpern gibt. Die Körperaxiome reichen also nicht aus, um die reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren. Der nächste Schritt folgt durch die Forderung, dass man *reelle Zahlen miteinander vergleichen kann*, die reellen Zahlen bilden einen *angeordneten Körper*. Die Ordnung auf  $\mathbb{R}$  führen wir ein, indem wir die bekannten Eigenschaften der *positiven Zahlen*

$$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

bezüglich der Ordnung in Axiome fassen.

**Definition 2.7.** Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper und  $P \subseteq K$ . Dann heißt  $P$  ein *Positivbereich*, falls gilt:

(O1) Für jedes  $x \in K$  gilt genau eine der drei Eigenschaften

$$x \in P \quad \text{oder} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad -x \in P.$$

(O2) Sind  $x, y \in P$ , so sind auch  $x + y, x \cdot y \in P$ .

Wir schreiben dann kurz

- $x < y$  und  $y > x$  für  $y - x \in P$ .
- $x \leq y$  und  $y \geq x$  für  $x < y$  oder  $x = y$ .

Ein Körper zusammen mit einem Positivbereich heißt *angeordneter Körper*.

Ist  $x \in P$ , so nennt man  $x$  *positiv*, das ist also äquivalent zu  $x > 0$ . Ist  $-x \in P$ , so nennt man  $x$  *negativ*, das ist also äquivalent zu  $x < 0$ . Ist  $x \geq 0$ , so sagt man auch  $x$  ist *nichtnegativ*, ist  $x \leq 0$ , dann heißt  $x$  *nichtpositiv*.

Wieder fordern wir für die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  kategorisch:

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ IST EIN ANGEORDNETER KÖRPER!}}$$

Allerdings charakterisiert diese Forderung die reellen Zahlen immer noch nicht eindeutig. Auch die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  bilden einen angeordneten Körper mit dem Positivbereich

$$\mathbb{Q}_{>0} = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}.$$

Es folgt ein Satz, der eine Reihe von Regeln in einem angeordneten Körper zusammenfasst. Einige davon werden wir anschließend beweisen, andere sollten Sie sich selbst überlegen. Wieder ist es so, dass Sie alle diese Regeln vom Rechnen mit Ungleichungen von reellen Zahlen aus der Schule kennen sollten.

**Satz 2.8.** Sei  $(K, +, \cdot, P)$  ein angeordneter Körper. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

- (i) Ungleichungen kann man addieren:  $x_1 < y_1$  und  $x_2 \leq y_2$  impliziert  $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$ .
- (ii) Ungleichungen kann man mit positiven Zahlen multiplizieren:  $x < y$  und  $z > 0$  impliziert  $x \cdot z < y \cdot z$ .
- (iii) Achtung:  $x < y$  und  $z < 0$  impliziert  $x \cdot z > y \cdot z$ .
- (iv) Quadrate sind nichtnegativ:  $x \neq 0$  impliziert  $x^2 > 0$ . Insbesondere ist  $1 > 0$ .
- (v) Reziproke haben gleiches Vorzeichen:  $x > 0$  impliziert  $x^{-1} > 0$ .

*Beweis.* Wir wollen nur beispielhaft (i) zeigen, die anderen Beweise sollten Sie sich selbst überlegen. Die Voraussetzung  $x_1 < y_1$  bedeutet laut Definition  $y_1 - x_1 \in P$ . Die Voraussetzung  $x_2 \leq y_2$  bedeutet laut Definition  $y_2 - x_2 \in P$  oder  $y_2 = x_2$ . Mit Axiom (O2) und der Assoziativität der Addition folgt dann

$$(y_1 + y_2) - (x_1 + x_2) = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) \in P.$$

Daraus folgt nun wieder per Definition  $y_1 + y_2 > x_1 + x_2$ . □

Eine wichtige Folgerung ist

**Korollar 2.9.** Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Lässt sich  $-1$  als Summe von Quadraten schreiben, so existiert in  $K$  kein Positivbereich,  $K$  kann also nicht angeordnet werden.

Zum Beweis dieses Satzes führen wir einen *Widerspruchsbeweis*. Hier geht man zum Beweis einer Implikation  $p \Rightarrow q$  davon aus, dass  $p \wedge \neg q$  gilt und zeigt, dass dies nicht sein kann. Dann muss also  $\neg(p \wedge \neg q)$  gelten, was logisch äquivalent zu  $p \Rightarrow q$  ist.

*Beweis.* Nehmen wir also im Gegenteil zur Behauptung an, dass der Körper  $K$  angeordnet werden kann. Da nach (iv) in obigem Satz Quadrate nichtnegativ sind, sind mit (i) auch Summen von Quadraten nichtnegativ. Damit ist also  $-1$  nichtnegativ und wegen  $-1 \neq 0$  folgt  $-1 > 0$ . Nun ist aber nach (iv) auch  $1 > 0$ . Mit (i) erhalten wir dann aus  $-1 > 0$  und  $1 > 0$  durch Addition

$$0 = (-1) + 1 > 0,$$

und damit einen Widerspruch. Also ist unsere Annahme, dass  $K$  angeordnet werden kann, falsch und die Behauptung des Korollars bewiesen. □

**Beispiel 2.10.** Im Körper mit zwei Elementen aus Beispiel 2.5 gilt  $-1 = 1 = 1^2$ . Dieser Körper kann also nicht angeordnet werden.

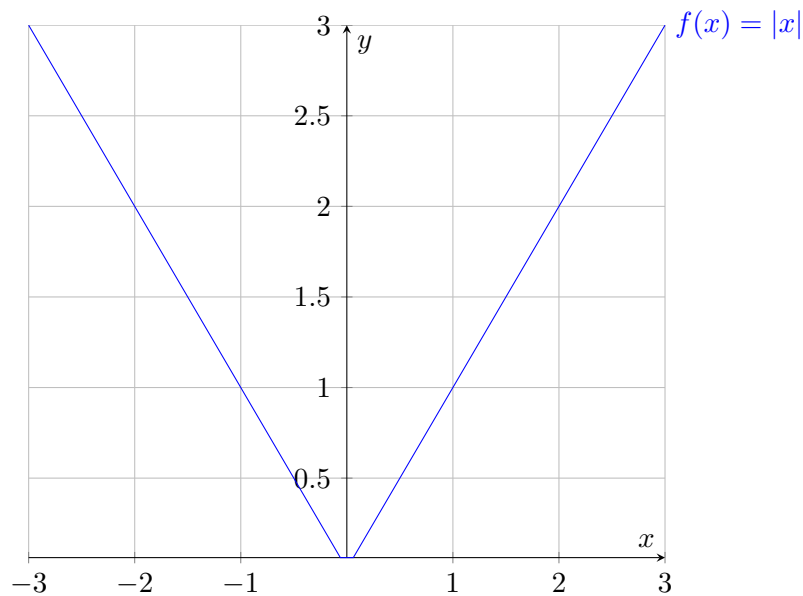
Wir wollen nun mit Hilfe der Ordnung der reellen Zahlen noch die Betrags- und Signumfunktion und Intervalle einführen. Das kann man wieder in einem beliebigen angeordneten Körper machen, wir benutzen gleich  $K = \mathbb{R}$ , den für uns relevanten Fall.

Für  $x \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und nennen  $|x|$  den *Betrag* von  $x$ .

Die *Betragsfunktion*  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist dann die Funktion  $x \mapsto |x|$ . Der Graph der Funktion sieht folgendermaßen aus:



Die Eigenschaften des Absolutbetrags fasst der nächste Satz zusammen:

**Satz 2.11.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

(i)  $x \leq |x|$ .

(ii)  $|xy| = |x| |y|$ .

(iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

(iv)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

Die Eigenschaft (iii) ist die *Dreiecksungleichung* für reelle Zahlen.

*Beweis.* Die Eigenschaft (i) folgt direkt aus der Definition. Die Eigenschaft (ii) zeigt man mit Hilfe einer Fallunterscheidung der vier Fälle  $x, y \geq 0$ ;  $x \geq 0, y < 0$ ;  $x < 0, y \geq 0$  und  $x, y < 0$ . Die Eigenschaft (iii) ergibt sich dann aus den beiden Ungleichungen

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{und} \quad -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|,$$

die beide aus (i) folgen.

Um (iv) zu zeigen, benutzen wir die Dreiecksungleichung (iii), um die Ungleichung

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

zu erhalten, die dann durch Subtraktion von  $|y|$  zur Ungleichung

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

führt. Durch Vertauschen der Rollen von  $x$  und  $y$  erhält man auch

$$-(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.$$

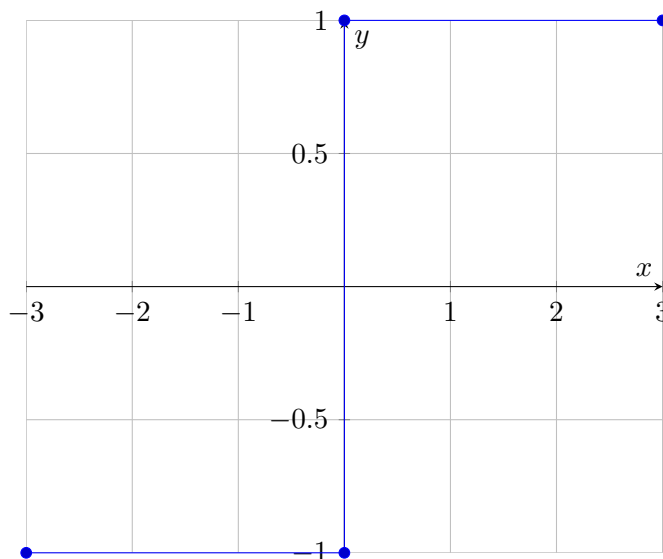
Beide Ungleichungen zusammen liefern die Behauptung (iv). □

Für  $x \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und nennen  $\operatorname{sgn}(x)$  das *Vorzeichen* oder *Signum* von  $x$ . Dann hat man für  $x, y \in \mathbb{R}$

- $x = \operatorname{sgn}(x) |x|$  und
- $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(y)$ .



Schließlich benötigen wir noch für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  die Begriffe des

<i>abgeschlossenen Intervalls</i>	$[a, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
<i>offenen Intervalls</i>	$(a, b)$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
<i>halboffenen Intervalls</i>	$(a, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
<i>halboffenen Intervalls</i>	$[a, b)$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Wir werden auch die naheliegenden Bezeichnungen  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$  und  $(-\infty, \infty)$  für unendliche Intervalle benutzen.

### 2.3 Die natürlichen Zahlen

Sowohl die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  als auch die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind angeordnete Körper. Also sind die reellen Zahlen noch immer nicht eindeutig charakterisiert. Bevor wir mit der Forderung der *Vollständigkeit* die Axiomatik der reellen Zahlen abschließen, wollen wir zunächst *in einem beliebigen angeordneten Körper* die natürlichen Zahlen finden.

Sie kennen die natürlichen Zahlen schon sehr gut aus der Schule. Wir wollen im Folgenden einsehen, dass man die Menge der natürlichen Zahlen tatsächlich in unserem axiomatisch charakterisierten Körper der reellen Zahlen wiederfinden kann - als kleinste *induktive Menge*. Das wird uns Gelegenheit geben, das Verfahren der vollständigen Induktion kennenzulernen.

Man könnte einfach versuchen, die natürlichen Zahlen gerade als die Menge der Zahlen  $1, 2 := 1 + 1, 3 := 2 + 1, \dots$  zu definieren. Was den Mathematiker hieran stört sind die Pünktchen, die nicht klar ausdrücken, was gemeint ist. Dieses Problem wollen wir jetzt beheben und eine auch mathematisch befriedigende Definition der natürlichen Zahlen geben.

Dazu benötigen wir den Begriff des *Durchschnitts von Mengensystemen*. Ist eine Grundmenge  $M$  gegeben und ist  $\mathcal{M}$  eine Teilmenge der Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  von  $M$ , dann nennen wir  $\mathcal{M}$  ein *System von Teilmengen* von  $M$ . Der Durchschnitt dieses Mengensystems  $\mathcal{M}$  ist dann die Teilmenge von Elementen von  $M$ , die zu *jeder* der Mengen im Mengensystem  $\mathcal{M}$  gehören:

$$\bigcap \mathcal{M} = \{x \in M : x \in N \text{ für jedes } N \in \mathcal{M}\}.$$

Analog bildet man die Vereinigung

$$\bigcup \mathcal{M} = \{x \in M : x \in N \text{ für ein } N \in \mathcal{M}\}.$$

**Beispiel 2.12.** Sei  $M = \{0, 17, 42\}$  und sei

$$\mathcal{M} = \{\{0\}, \{0, 17\}, \{0, 42\}\}.$$

Dann ist

$$\bigcap \mathcal{M} = \{0\} \cap \{0, 17\} \cap \{0, 42\} = \{0\}$$

und

$$\bigcup \mathcal{M} = \{0\} \cup \{0, 17\} \cup \{0, 42\} = \{0, 17, 42\}.$$

**Beispiel 2.13.** Sei  $\mathcal{M}$  das System aller Teilmengen der reellen Zahlen, die die Zahlen 0, 17, 42 als Elemente enthalten. Dann ist

$$\bigcap \mathcal{M} = \bigcap \{N \subseteq \mathbb{R} : 0, 17, 42 \in N\} = \{0, 17, 42\}.$$

Vielleicht halten Sie sich an dieses letzte Beispiel für die nächsten zwei Definitionen. Dazu sei  $K$  ein beliebiger *angeordneter Körper*.

**Definition 2.14.** Eine Teilmenge  $M \subseteq K$  heißt *induktiv*, falls gilt:

- (I1)  $1 \in M$
- (I2) Ist  $x \in M$ , so ist auch  $x + 1 \in M$ .

Ein triviales Beispiel ist:  $M = K$  ist induktiv.

**Definition 2.15.** Den Durchschnitt des Mengensystems  $\mathcal{M}$  aller induktiven Mengen bezeichnen wir mit  $\mathbb{N}$  und nennen ihn die Menge der *natürlichen Zahlen* (in  $K$ ).

Offensichtlich ist die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen selbst induktiv. Die Menge  $\mathbb{N}$  ist die kleinste induktive Menge. Dies zeigt der folgende Satz, der uns auch das *Beweisprinzip der vollständigen Induktion* liefert.

**Satz 2.16.** *Ist  $A$  eine induktive Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , so gilt  $A = \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Der Beweis ist fast trivial. Da nach Voraussetzung  $A$  induktiv ist, gilt nach Definition von  $\mathbb{N}$  die Inklusion  $\mathbb{N} \subseteq A$ . Nun ist aber nach Voraussetzung auch  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Damit muss  $A = \mathbb{N}$  sein.  $\square$



Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion kann man sauber *definieren*, ohne Fortsetzungspunktchen zu verwenden.

**Beispiel 2.17** (Fakultät). Wir setzen  $1! := 1$  und  $(n + 1)! := (n + 1) \cdot n!$ . Damit ist  $n!$  (*sprich  $n$ -Fakultät*) für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  per Induktion definiert. Die Pünktchenschreibweise wäre

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n.$$

Man setzt auch noch  $0! := 1$ .

**Beispiel 2.18** (Summen- und Produktzeichen). Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $x_n \in K$ . Dann definieren wir

$$\sum_{k=1}^1 x_k := x_1$$

und

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k := \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) + x_{n+1}.$$

Die Pünktchenschreibweise wäre

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + \dots + x_n.$$

Analog definiert man Produkte durch

$$\prod_{k=1}^n x_k = x_1 \cdot \dots \cdot x_n.$$

Ein Spezialfall sind die Potenzen

$$x^n = \prod_{k=1}^n x.$$

Man setzt  $x^0 = 1$  für  $x \neq 0$ .

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion kann man Eigenschaften  $E(n)$  für alle natürlichen Zahlen  $n$  *beweisen*, indem man

- $E(1)$  für  $n = 1$  beweist (Induktionsanfang) und
- aus der *Induktionsvoraussetzung*  $E(n)$  die *Induktionsbehauptung*  $E(n + 1)$  zeigt, also die Implikation  $E(n) \Rightarrow E(n+1)$  beweist. Diesen Schritt nennt man auch den Induktionsschritt.

Das klassische erste Beispiel für einen Induktionsbeweis ist die Summenformel für die ersten  $n$  natürlichen Zahlen:

**Satz 2.19.** *Für jede natürliche Zahl  $n$  gilt*

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n + 1)n}{2}.$$

*Beweis.* • *Induktionsanfang:* Wir müssen die Behauptung für  $n = 1$  nachprüfen. Diese ist offensichtlich richtig:  $\sum_{k=1}^1 k = 1$  und  $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$  sind gleich.

- *Induktionsschritt:* Wir schreiben zunächst die Induktionsvoraussetzung auf:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Der Induktionsschritt besteht dann darin, mit Hilfe dieser Voraussetzung die Induktionsbehauptung

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

zu beweisen. Das macht man sich klar durch die Rechnung

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left( \sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)n + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Wo haben wir die Induktionsvoraussetzung benutzt?

□

Als zweites Beispiel wollen wir die *Bernoulli-Ungleichung* beweisen. Sie gilt in jedem angeordneten Körper  $K$ , insbesondere in den reellen Zahlen.

**Satz 2.20.** Sei  $x \geq -1$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

*Beweis.* Für  $n=1$  gilt offensichtlich  $(1+x)^1 = 1+x = 1+1 \cdot x \geq 1+1 \cdot x$ , womit der Induktionsanfang erledigt ist. Der Induktionsschritt besteht nun im Beweis der Induktionsbehauptung

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1) \cdot x,$$

wobei wir die Gültigkeit der Induktionsvoraussetzung

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

annehmen dürfen. Dieser Beweis geht dann so:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Hier haben wir neben der Induktionsvoraussetzung noch  $x^2 \geq 0$  benutzt. Auch  $x \geq -1$  haben wir benutzt, wo eigentlich? □

Wir geben schließlich noch einen Satz an, der die Eigenschaften der natürlichen Zahlen zusammenfasst. Diese Eigenschaften sind Ihnen aus der Schule wohlbekannt, bewiesen werden sie jetzt mit dem Prinzip der vollständigen Induktion.

**Satz 2.21.** Sei  $(K, +, \cdot, P)$  ein angeordneter Körper und  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen (in  $K$ ). Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

- (i) Summen und Produkte natürlicher Zahlen sind natürliche Zahlen.
- (ii) Jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 1$  hat einen Vorgänger  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m+1=n$ .
- (iii) Sind  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in K$  mit  $x > 0$  derart, dass  $n+x \in \mathbb{N}$  ist, so ist  $x \in \mathbb{N}$ .
- (iv) Sind  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$ , so ist  $m-n \in \mathbb{N}$  und damit  $m \geq n+1$ .
- (v) Jede nichtleere Menge  $A \subseteq \mathbb{N}$  enthält ein Minimum  $n_0 \in A$ , d.h.  $n \geq n_0$  für alle  $n \in A$ .

*Beweis.* Wir beweisen wieder nur beispielhaft die Eigenschaft (iii) und (iv). Für die anderen Eigenschaften verweisen wir auf Übung und Literatur.

Also zeigen wir zunächst (iii) durch Induktion. Der Induktionsanfang ist die Behauptung: Ist  $x + 1 \in \mathbb{N}$  und  $x > 0$ , so ist  $x \in \mathbb{N}$ . Dies folgt aus (ii), was man also vorher zeigen sollte.

Für den Induktionsschluss müssen wir aus  $(n + 1) + x \in \mathbb{N}$  die Folgerung  $x \in \mathbb{N}$  ableiten. Dazu können wir die Induktionsvoraussetzung verwenden, die liefert nämlich aus  $n + (1 + x) \in \mathbb{N}$  wegen  $1 + x > 0$  zunächst  $1 + x \in \mathbb{N}$ . Wenden wir darauf wieder den Induktionsanfang an, erhalten wir  $x \in \mathbb{N}$ .

Die Eigenschaft (iv) erhält man nun direkt aus der Eigenschaft (iii) durch setzen von  $x = m - n$ . Dann ist  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x > 0$  und  $n + x = m \in \mathbb{N}$  und (iii) liefert die Folgerung  $x = m - n \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $x = m - n \geq 1$  und folglich  $m \geq n + 1$ .  $\square$

Wir wollen nun noch einen kleinen Ausflug in die Kombinatorik unternehmen und Binomialkoeffizienten, ihre kombinatorische Bedeutung und den binomischen Satz kennenlernen. Zunächst interpretieren wir die Zahl  $n!$  kombinatorisch als die Anzahl der möglichen Anordnungen einer Menge aus  $n$  Elementen. Dazu überlegt man sich, dass man als erstes Element ein beliebiges der  $n$  Elemente wählen kann, man hat also  $n$  Möglichkeiten für die Auswahl des ersten Elementes. Für das zweite Element hat man nur noch  $n - 1$  Elemente zur Auswahl usw.

Eine kombinatorische Grundaufgabe ist auch die Bestimmung der Anzahl von  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge. Hier geht ganz man analog vor und erhält zunächst  $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$  Möglichkeiten für die Auswahl *unter Beachtung der Reihenfolge*. Nun gibt es aber für jede Auswahl von  $k$  Elementen  $k!$  Reihenfolgen, für die gesuchte Anzahl erhält man also

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Diese Zahlen, die wir also für  $k, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq k \leq n$  gefunden haben, nennt man *Binomialkoeffizienten*. An der rechten Darstellung erkennt man sofort die Symmetrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}.$$

Außerdem hat man die Randterme

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Der *binomische Satz* ist dann für Elemente  $x, y$  in einem Körper  $K$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  die Formel

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Diese ergibt sich durch Ausmultiplizieren der rechten Seite und Zusammenfassen gleicher Terme. Beim Ausmultiplizieren erhält man nämlich eine Summe aus allen Produkten  $z_1 z_2 \cdots z_n$ , wobei jedes  $z_i$  entweder  $x$  oder  $y$  ist. Zusammenfassen aller Summanden, in denen genau  $k$  mal  $x$  (und damit  $n - k$  mal  $y$ ) auftritt, ergibt  $\binom{n}{k}$  gleiche Summanden der Form  $x^k y^{n-k}$  und beweist die Formel. Für  $n = 0, 1$  erhalten wir Trivialitäten, für  $n = 2$  haben wir die aus der Schule bekannte erste binomische Formel

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$



*Beweis.* Wir nehmen das Gegenteil der Behauptung an, d.h. es gibt ein  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = 2$ . Wegen  $(-x)^2 = x^2$  können wir zusätzlich noch  $x > 0$  annehmen und erhalten natürliche Zahlen  $m, n$  mit  $x = \frac{m}{n}$ . Außerdem können wir fordern, dass  $m$  und  $n$  nicht beide gerade sind, sonst kürzen wir durch den gemeinsamen Faktor 2. Dann liefert  $x^2 = 2$  die Gleichung  $m^2 = 2n^2$ , also ist  $m^2$  gerade. Aus dem Satz 1.2 folgt dann, dass auch  $m$  gerade ist, sich also in der Form  $m = 2k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  schreiben lässt. Dann erhalten wir  $2n^2 = m^2 = 4k^2$ , also  $n^2 = 2k^2$ . Wieder folgern wir, dass  $n^2$  und damit  $n$  gerade ist. Also sind sowohl  $m$  als auch  $n$  gerade im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

Eine *reelle* Zahl  $x$  mit  $x^2 = 2$  soll es aber geben, und dazu benötigen wir den Begriff der Vollständigkeit, den wir mit Hilfe des Begriffs *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* definieren wollen.

Wir gehen wieder von einem angeordneten Körper  $K$  aus und schreiben für nichtleeres  $A \subseteq K$  und  $x \in K$  kurz  $A \leq x$ , falls für alle  $a \in A$  die Ungleichung  $a \leq x$  gilt. Dann nennen wir  $x$  eine *obere Schranke* der Menge  $A$ . Falls es eine obere Schranke der Menge  $A$  gibt, nennen wir  $A$  *nach oben beschränkt*. Entsprechend schreiben wir  $x \leq A$ , falls für alle  $a \in A$  die Ungleichung  $x \leq a$  gilt. Dann nennen wir  $x$  eine *untere Schranke* der Menge  $A$ . Falls es eine untere Schranke der Menge  $A$  gibt, nennen wir  $A$  *nach unten beschränkt*. Die Menge  $A$  heißt *beschränkt*, falls sie sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist.

Ist  $A \leq x$  und  $x \in A$ , so heißt  $x$  *Maximum* der Menge  $A$  und wird mit  $\max A$  bezeichnet. Ist  $x \leq A$  und  $x \in A$ , so heißt  $x$  *Minimum* der Menge  $A$  und wird mit  $\min A$  bezeichnet. Falls das Maximum (Minimum) einer Menge  $A$  existiert, ist es eindeutig bestimmt.

**Beispiel 2.23.** Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen in  $K$  ist nach unten beschränkt. Außerdem ist  $\min \mathbb{N} = 1$ .

**Beispiel 2.24.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Die Intervalle  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, b)$  sind beschränkt. Welche der Intervalle haben ein Maximum, welche der Intervalle ein Minimum?

Obwohl das Intervall  $(0, 1)$  beschränkt ist, hat es weder Maximum noch Minimum. Es gibt aber eine kleinste obere Schranke, nämlich 1. Das motiviert die wichtigste Definition in diesem Abschnitt:

**Definition 2.25.** Sei  $A \subseteq K$  nichtleer und  $x \in K$ . Dann heißt  $x$  *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von  $A$  (bezeichnet mit  $x = \sup A$ ), falls gilt:

- $A \leq x$ , also  $x$  ist obere Schranke von  $A$  und
- Aus  $A \leq y$  folgt  $x \leq y$ .

Entsprechend heißt  $x$  *größte untere Schranke* oder *Infimum* von  $A$  (bezeichnet mit  $x = \inf A$ ), falls gilt:

- $x \leq A$ , also  $x$  ist untere Schranke von  $A$  und
- Aus  $y \leq A$  folgt  $y \leq x$ .

Infimum und Supremum sind eindeutig bestimmt. Sind z. B.  $x_1, x_2$  Suprema von  $A$ , so folgt aus der zweiten definierenden Eigenschaft für  $x_1$  die Ungleichung  $x_1 \leq x_2$ . Analog gilt aber auch  $x_2 \leq x_1$ , also  $x_1 = x_2$ .

**Beispiel 2.26.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Dann ist

$$\sup[a, b] = \sup[a, b) = \sup(a, b] = \sup(a, b) = b$$

und

$$\inf[a, b] = \inf[a, b) = \inf(a, b] = \inf(a, b) = a.$$

**Beispiel 2.27.** Sei  $A \subseteq K$  nichtleer und sei  $-A := \{-x : x \in A\}$ . Dann ist  $A$  nach oben beschränkt genau dann, wenn  $-A$  nach unten beschränkt ist. Also hat  $A$  ein Supremum genau dann, wenn  $-A$  ein Infimum hat und in diesem Fall gilt  $\inf(-A) = -\sup A$ .

Supremum und Infimum kann man auch folgendermaßen charakterisieren, was für die Berechnung in gewissen Fällen vorteilhaft ist. Sei wieder  $A$  nach oben beschränkt. Dann ist  $x = \sup A$  genau dann, wenn gilt

- $A \leq x$ , also  $x$  ist obere Schranke von  $A$  und
- Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $a \in A$  mit  $a > x - \varepsilon$ .

Analog ist für  $A$  nach unten beschränkt  $x = \inf A$  genau dann, wenn gilt

- $x \leq A$ , also  $x$  ist untere Schranke von  $A$  und
- Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $a \in A$  mit  $a < x + \varepsilon$ .

**Definition 2.28.** Ein angeordneter Körper  $K$  heißt *vollständig*, falls jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von  $K$  ein Supremum in  $K$  hat.

Ist  $K$  vollständig, dann hat auch jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von  $K$  ein Infimum in  $K$ . Man hätte alternativ also auch die Existenz von Infima fordern können.

Wieder fordern wir für die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  kategorisch:

$\mathbb{R}$  IST EIN VOLLSTÄNDIGER ANGEORDNETER KÖRPER!

Damit ist der Zahlenbereich  $\mathbb{R}$  (bis auf Isomorphie = Strukturgleichheit) eindeutig bestimmt, d.h. hat man zwei Strukturen  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}$  mit obigen Eigenschaften, so gibt es eine bijektive Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$  und  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
- $f(0) = 0$  und  $f(1) = 1$
- $f(-a) = -f(a)$  und  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
- $f(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}_{>0}$
- $f(\sup A) = \sup f(A)$

Den Beweis dieser Eindeutigkeitsaussage können wir hier nicht führen. Wir begnügen uns damit, ab jetzt das Axiomensystem für  $\mathbb{R}$  als Grundlage für unsere weitere Arbeit zu nutzen.

Wir wollen nun die Vollständigkeit der reellen Zahlen ausnutzen, um uns zwei Tatsachen klarzumachen. Das ist erstens die Unbeschränktheit der natürlichen Zahlen, die man auch *archimedische*

*Eigenschaft* von  $\mathbb{R}$  nennt, und zweitens die Existenz von Wurzeln positiver Zahlen, die man in  $\mathbb{Q}$  im allgemeinen nicht hat.

Die archimedische Eigenschaft in verschiedenen Varianten enthält der folgende Satz. Die archimedische Eigenschaft im engeren Sinne ist die Eigenschaft (i). Die Eigenschaft (iv) besagt, dass die rationalen Zahlen überall in den reellen Zahlen dicht liegen.

**Satz 2.29.**

(i)  $\mathbb{N}$  ist eine unbeschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , d.h. zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \leq n$ .

(ii) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ .

(iii) Zu  $\varepsilon > 0$  und  $M \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n\varepsilon \geq M$ .

(vi) Zu  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$  gibt es eine rationale Zahl  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  mit  $x \leq \frac{m}{n} \leq y$ .

*Beweis.* Wir starten mit dem Beweis von (i). Nehmen wir im Gegenteil zur Behauptung an, dass  $\mathbb{N}$  beschränkt ist, also die kleinste obere Schranke  $x = \sup \mathbb{N}$  existiert. Hier nutzen wir also schon die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  aus. Da  $x$  die kleinste obere Schranke von  $\mathbb{N}$  ist, ist  $x - 1$  keine obere Schranke von  $\mathbb{N}$ , es gibt also  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x - 1 < n$ . Dies impliziert aber durch Addition von 1 auch  $x < n + 1$ . Nun ist aber  $n + 1 \in \mathbb{N}$  wegen  $n \in \mathbb{N}$ , also ist  $x$  doch keine obere Schranke von  $\mathbb{N}$  im Widerspruch zur Annahme.

Nun ist (iii) leicht einzusehen, wir wählen ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \frac{M}{\varepsilon}$ . Die Eigenschaft (ii) ist der Spezialfall von (iii) mit  $M = 1$ .

Für den Beweis von (iv) genügt es, den Fall  $x, y > 0$  zu betrachten (warum?). Dann suchen wir also  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $nx \leq m \leq ny$ . Dazu wählen wir zunächst mit der Eigenschaft (i) ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n(y - x) \geq 1$ . Nun gibt es wieder nach (i) natürliche Zahlen  $m$  mit  $m \geq nx$ . Nach Eigenschaft (v) in Satz 2.21 gibt es eine kleinste Zahl  $m$  dieser Art. Dann ist also  $m \geq nx$  und  $m - 1 < nx$ . Die letzte Bedingung impliziert nun  $m < nx + 1 \leq ny$ , also haben wir  $nx \leq m \leq ny$  wie gesucht.  $\square$

Und nun kommen wir zur Existenz von Wurzeln.

**Satz 2.30.** Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq 0$  und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert genau eine reelle Zahl  $y \geq 0$  mit  $y^n = x$ . Diese Zahl  $y$  heißt  $n$ -te Wurzel von  $x$  und wird mit  $\sqrt[n]{x}$  oder  $x^{1/n}$  bezeichnet.

*Beweis.* Für  $x = 0$  ist  $y = 0$  die eindeutig bestimmte  $n$ -te Wurzel. Sei also ab jetzt  $x > 0$ . Die Eindeutigkeit ist auch klar, da aus  $0 < y_1 < y_2$  die Ungleichung  $y_1^n < y_2^n$  folgt.

Wir definieren nun die Menge

$$A := \{z \in \mathbb{R} : z > 0 \text{ und } z^n \leq x\}.$$

Die Menge  $A$  ist nichtleer, für  $x \leq 1$  ist  $x \in A$  und für  $x > 1$  ist  $1 \in A$ . Die Menge  $A$  ist nach oben beschränkt durch  $1 + x$ , da für  $z > 1 + x$  die Ungleichung  $z^n > (1 + x)^n \geq x^n$  gilt. Die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  liefert uns nun die Existenz von  $y = \sup A$ .

Wir zeigen nun  $y^n = x$ , indem wir die Ungleichungen  $y^n < x$  und  $y^n > x$  beide zum Widerspruch führen. In beiden Fällen benutzen wir die oft nützliche Identität

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}).$$

Nehmen wir also zunächst an, dass  $y^n < x$  ist. Wir werden jetzt ein  $z \in A$  konstruieren mit  $z > y$  im Widerspruch dazu, dass  $y$  obere Schranke von  $A$  ist. Dazu setzen wir  $z = y + \varepsilon$  für ein  $0 < \varepsilon < 1$  und folgern aus der obigen Identität

$$z^n - y^n = \varepsilon \left( z^{n-1} + z^{n-2}y + z^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1} \right) \leq \varepsilon n(y+1)^{n-1}.$$

Wählen wir nun  $\varepsilon > 0$  so klein, dass die rechte Seite kleiner als  $x - y^n > 0$  ist, so erhalten wir wie gewünscht  $z^n < x$ . Die Existenz so eines  $\varepsilon > 0$  sichert uns die archimedische Eigenschaft von  $\mathbb{R}$ !

Der Fall  $y^n > x$  wird analog behandelt. Wir werden jetzt ein  $t < y$  konstruieren mit  $t^n > x$ . Dann folgt für alle  $z \in A$  die Ungleichung  $z < t$  im Widerspruch dazu, dass  $y$  die *kleinste* obere Schranke von  $A$  sein sollte. Jetzt benutzen wir die obige Identität, um für  $t = y - \varepsilon$  die Abschätzung

$$y^n - t^n = \varepsilon \left( y^{n-1} + y^{n-2}t + y^{n-3}t^2 + \dots + t^{n-1} \right) \leq \varepsilon n y^{n-1}$$

einzusehen. Nun wählen wir wieder  $\varepsilon > 0$  klein genug, so dass die rechte Seite kleiner als  $y^n - x > 0$  ist, und erhalten wie gewünscht  $t^n > x$ .  $\square$

Es gibt verschiedene äquivalente Möglichkeiten, die Vollständigkeit der reellen Zahlen axiomatisch zu fassen. Eine dieser Möglichkeiten sind *Intervallschachtelungen*. Eine Folge  $(I_n)$  von *abgeschlossenen* Intervallen heißt *Intervallschachtelung*, falls  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$  gilt. Wir wollen diese nützliche äquivalente Formulierung der Vollständigkeit aus unserem Axiom der Existenz von kleinsten oberen Schranken ableiten.

**Satz 2.31.** *Ist  $(I_n)$  eine Intervallschachtelung, so ist der Durchschnitt  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  nichtleer.*

*Beweis.* Sei  $I_n = [a_n, b_n]$ . Die Intervallschachtelungsbedingung  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$  bedeutet

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  impliziert dann die Existenz von

$$a = \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad \text{und} \quad b = \inf\{b_1, b_2, b_3, \dots\},$$

da die Menge  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  (z.B. durch  $b_1$ ) nach oben beschränkt und die Menge  $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$  (z.B. durch  $a_1$ ) nach unten beschränkt ist. Es folgt

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a \leq b \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Damit liegen  $a$  und  $b$  in jedem der Intervalle  $I_n$ , also auch in ihrem Durchschnitt.  $\square$

## 2.5 Die komplexen Zahlen

Im Bereich der reellen Zahlen kann man, wie wir gesehen haben, keine Lösung der Gleichung  $z^2 + 1 = 0$  finden. Es ist aber wünschenswert, auch Nullstellen beliebiger Polynome

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

mit reellen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  zu haben. Die Existenz solcher Nullstellen liefert der *Fundamentalsatz der Algebra*, aber nur nach der Erweiterung des Zahlkörpers  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen zum Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen. Diese Erweiterung wollen wir jetzt durchführen.



Dazu schreiben wir  $i$  für eine Lösung der Gleichung  $z^2 + 1 = 0$ , also ist

$$i^2 = -1.$$

Die Zahl  $i$  nennt man die *imaginäre Einheit*. Wir wollen nun den *kleinsten* Körper  $\mathbb{C}$  konstruieren, der sowohl die reellen Zahlen als auch die Zahl  $i \notin \mathbb{R}$  enthält. Da Addition und Multiplikation nicht aus dem Körper  $\mathbb{C}$  hinausführen dürfen, sind dann auch alle Zahlen der Form

$$z = x + iy \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}$$

in unserem Körper  $\mathbb{C}$ . Da wir den kleinstmöglichen Zahlbereich suchen, der sowohl  $\mathbb{R}$  als auch  $i$  enthält, wollen wir einsehen, dass diese Konstruktion (mit geeigneten Operationen) tatsächlich ein Körper ist. Wir führen gleich noch die Bezeichnungen *Realteil*  $\operatorname{Re} z := x$  und *Imaginärteil*  $\operatorname{Im} z := y$  der komplexen Zahl  $z = x + iy$  ein. Die Darstellung  $z = x + iy$  nennt man *kanonische Darstellung* oder *algebraische Darstellung*.

Seien nun  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  zwei komplexe Zahlen in der kanonischen Darstellung. Dann erhält man die Summe

$$z + w = (x + u) + i(y + v),$$

also addiert man komplexe Zahlen, indem man die Realteile und die Imaginärteile addiert. Wie erhält man nun das Produkt? Dazu bemühen wir die Gleichung  $i^2 = -1$  und erhalten

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + ixv + iyu + i^2yv = (xu - yv) + i(xv + yu),$$

kurz

$$zw = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Formal kann man also die komplexen Zahlen identifizieren mit den Paaren  $(x, y)$  reeller Zahlen, also mit dem  $\mathbb{R}^2$ , wobei die Operationen dann gegeben sind durch

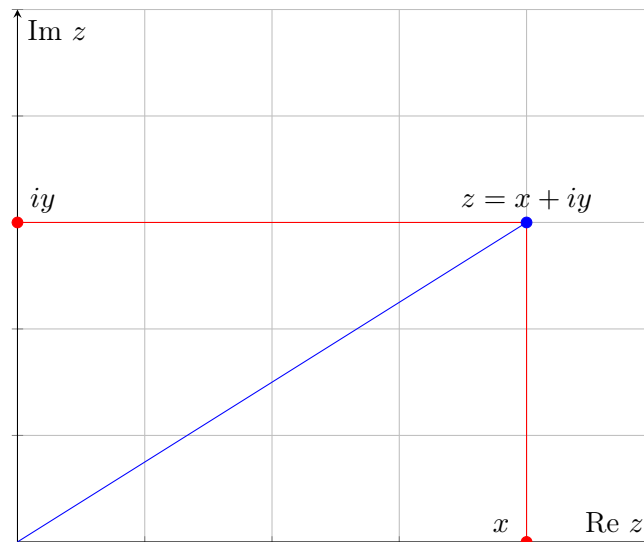
$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

und

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Damit kann man sich die komplexen Zahlen graphisch als *Gaußsche Zahlenebene* vorstellen. Die Addition entspricht dann der Addition von Vektoren.

Gaußsche Zahlenebene



**Satz 2.32.** Die komplexen Zahlen mit den definierten Operationen bilden einen Körper.

*Beweis.* Kommutativität, Assoziativität und Distributivität rechnet man einfach nach. Die 0 in  $\mathbb{C}$  ist natürlich die Zahl  $0 = 0 + i \cdot 0 = (0, 0)$  und die 1 in  $\mathbb{C}$  ist die  $1 = 1 + i \cdot 0 = (1, 0)$ . Weiter ist  $-z = -(x + iy) = -x - iy = (-x, -y)$  und

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = (x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Prüfen Sie das nach! □

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  findet man als *Teilkörper* der komplexen Zahlen, für die der Imaginärteil verschwindet. In der Darstellung als Zahlenpaare sind das die Paare  $(x, 0)$ , in der Gaußschen Zahlenebene ist das die  $x$ -Achse, die man deshalb auch *reelle Achse* nennt. Die komplexen Zahlen auf der  $y$ -Achse der Gaußschen Zahlenebene - der *imaginären Achse*, also die Zahlen  $iy$  mit  $y \in \mathbb{R}$ , nennt man *rein imaginär*.

Die zu  $z = x + iy$  *konjugiert komplexe Zahl* ist die Zahl  $\bar{z} = x - iy$ . Die komplexe Konjugation spiegelt also die Gaußsche Zahlenebene an der reellen Achse. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  und  $\overline{z \bar{w}} = \bar{z} \cdot w$
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$  und  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $z\bar{z} = x^2 + y^2$ , also ist  $z\bar{z} \in \mathbb{R}_{>0}$  für  $z \neq 0$ .

Die nichtnegative reelle Zahl

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

nennt man den *Betrag* der komplexen Zahl  $z = x + iy$ . Für  $z \in \mathbb{R}$  stimmt der Betrag mit dem vorher definierten Betrag für reelle Zahlen überein. In der Gaußschen Zahlenebene ist  $|z|$  der *Abstand* von  $z$  zum Ursprung 0. Man erhält für  $z, w \in \mathbb{C}$  die Regeln:

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$  und  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- $|zw| = |z||w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$  (Dreiecksungleichung)
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Die ersten drei Eigenschaften sind hierbei offensichtlich. Die vierte erhält man aus

$$|zw|^2 = (zw) \cdot \overline{zw} = z\bar{z} \cdot w\bar{w} = |z|^2 |w|^2.$$

Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \overline{(z + w)} = z\bar{z} + (z\bar{w} + \bar{z}w) + w\bar{w} = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

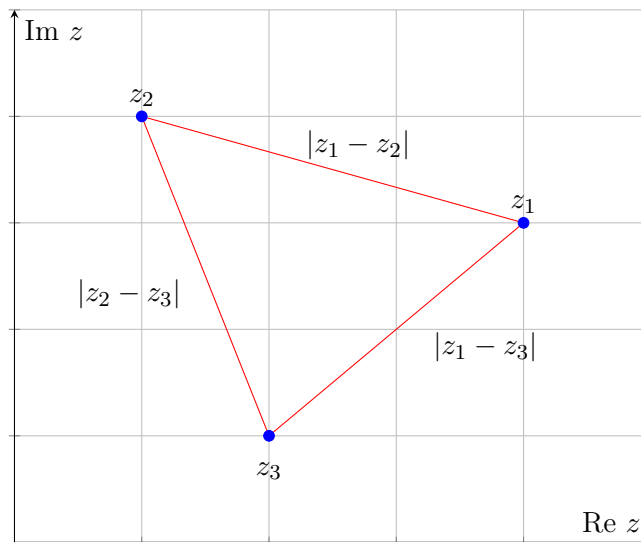
Die letzte Ungleichung folgt wie im reellen Fall aus der Dreiecksungleichung (tatsächlich?!).

Die Dreiecksungleichung kann man äquivalent formulieren als

$$|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \quad \text{für } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

indem man  $z = z_1 - z_2$  und  $w = z_2 - z_3$  setzt. In der Gaußschen Zahlenebene ist  $|z - w|$  der Abstand von  $z$  und  $w$ . Dies motiviert den Namen Dreiecksungleichung.

Dreiecksungleichung



Da wir in  $\mathbb{C}$  die Zahl  $-1$  als Quadrat darstellen können, kann man den Körper  $\mathbb{C}$  *nicht anordnen*. Es gibt also keine Möglichkeit, die Ordnung der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen auszuweiten. Deshalb vereinbaren wir, dass Schreibweisen wie  $a \geq b$ ,  $a > b$ ,  $a \leq b$  oder  $a < b$  immer implizit die Forderung  $a, b \in \mathbb{R}$  enthalten!

Wir stellen noch eine Tabelle zusammen über die anschauliche Deutung des Rechnens mit komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

$\mathbb{C}$	Gaußsche Zahlenebene
$z = x + iy$	Punkt mit den Koordinaten $(x, y)$
$\operatorname{Re} z$	$x$ -Koordinate
$\operatorname{Im} z$	$y$ -Koordinate
reelle Zahlen	Punkte auf der $x$ -Achse
rein imaginäre Zahlen	Punkte auf der $y$ -Achse
$-z$	$z$ am Ursprung gespiegelt
$\bar{z}$	$z$ an der $x$ -Achse gespiegelt
$ z $	Abstand von $z$ zum Ursprung
$ z_1 - z_2 $	Abstand von $z_1$ und $z_2$
$z_1 + z_2$	„Vektoraddition“
Dreiecksungleichung	Dreiecksungleichung

Um das Rechnen mit komplexen Zahlen hier bereits vollständig abzuhandeln, setzen wir ab jetzt die Kenntnis der trigonometrischen Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  aus der Schule voraus. In der

Vorlesung werden wir diese erst später behandeln. Sei nun  $z$  eine komplexe Zahl mit  $r = |z|$ . Dann erhält man aus der Darstellung von  $z$  in der Gaußschen Zahlenebene die Darstellung von  $z$  in *Polarkoordinaten*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Hierbei ist  $\varphi = \arg z \in \mathbb{R}$  das *Argument* von  $z$ . Die  $2\pi$ -Periodizität der trigonometrischen Funktionen bewirkt, dass (für  $z \neq 0$ )  $\varphi$  nur bis auf additive Vielfache von  $2\pi$  eindeutig bestimmt ist. Die Polarkoordinatendarstellung nennt man auch *trigonometrische Darstellung*.

Diese trigonometrische Darstellung ist gut geeignet, um komplexe Zahlen multiplikativ zu verknüpfen. Dazu benötigen wir die *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi\end{aligned}$$

für die wir an dieser Stelle auf Ihre Kenntnisse aus der Schule oder das Tafelwerk verweisen. Auch diese werden wir in der Vorlesung erst später beweisen. Hat man nun zwei komplexe Zahlen

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{und} \quad w = s(\cos \psi + i \sin \psi)$$

in trigonometrischer Darstellung, so ergibt sich für das Produkt

$$\begin{aligned}zw &= rs(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= rs((\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi)).\end{aligned}$$

Die Additionstheoreme liefern dann die Multiplikationsformel

$$zw = rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Beim Multiplizieren zweier komplexer Zahlen *multiplizieren sich die Beträge* (das wussten wir schon) und *addieren sich die Argumente*. In der Gaußschen Zahlenebene entspricht die Multiplikation also einer *Drehstreckung*.

Eine bequeme Darstellung für eine komplexe Zahl ist die *Eulersche Darstellung*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) =: re^{i\varphi}.$$

An dieser Stelle soll das für uns nichts anderes als eine sinnvolle Kurzschreibweise für die trigonometrische Darstellung sein. Die Exponentialfunktion für komplexe Argumente werden wir dann später in der Vorlesung ausführlich behandeln. Mit den Werten der trigonometrischen Funktionen an den Stellen  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$  erhält man

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = i \quad e^{\pi i} = -1 \quad e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i \quad e^{2\pi i} = 1.$$

Die Multiplikationsformel kann man dann mit

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad w = se^{i\psi}$$

schreiben als

$$zw = re^{i\varphi} se^{i\psi} = rse^{i(\varphi+\psi)}.$$

Die bekannte Regel für das Multiplizieren von Potenzen wird also respektiert.

Aus der Multiplikationsformel erhält man per Induktion die *Formel von Moivre* für Potenzen  $z^n$  von  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$ :

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}.$$

Als Beispiel berechnen wir  $(1 + i)^{42}$ . Dazu bringen wir zunächst  $1 + i$  in die trigonometrische Form

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

und erhalten anschließend mit der Formel von Moivre

$$(1 + i)^{42} = (\sqrt{2})^{42} \left( \cos \frac{42\pi}{4} + i \sin \frac{42\pi}{4} \right) = 2^{21} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2^{21}i.$$

Vergleichen Sie dies mit einer Berechnung über die binomische Formel! Mit der Eulerschen Darstellung kann man dies noch kompakter schreiben als

$$(1 + i)^{42} = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}})^{42} = 2^{21}e^{\frac{42\pi i}{4}} = 2^{21}e^{10\pi i}e^{\frac{\pi i}{2}} = 2^{21}i.$$

Überlegen Sie sich an dieser Stelle als Übung, wie man aus der Standardform  $z = x + iy$  der komplexen Zahl die trigonometrische Form berechnen kann!

## 2.6 Endlichkeit, Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir uns damit beschäftigen, wie man die Größe von (insbesondere unendlichen) Mengen miteinander vergleichen kann. Dabei werden wir einsehen, dass es (in gewissem Sinne) *genauso viele rationale Zahlen wie natürliche Zahlen*, aber *mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen* gibt.

**Definition 2.33.** Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen *gleichmächtig*, falls es eine Bijektion von  $A$  auf  $B$  gibt. In diesem Fall schreiben wir  $A \sim B$ .

Eine Menge  $A$  mit  $n \in \mathbb{N}$  Elementen ist gleichmächtig zur Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Solche Mengen nennen wir natürlich *endliche Mengen* und die Zahl  $n$  ist die *Kardinalität* der Menge  $A$ , die man oft mit  $\#A$  oder  $|A|$  bezeichnet. Auch die leere Menge ist eine endliche Menge mit der Kardinalität 0.

Die Gleichmächtigkeit ist eine Relation zwischen Mengen. Sie ist *reflexiv*, d.h. für jede Menge  $A$  gilt  $A \sim A$ . Sie ist *symmetrisch*, d.h. für je zwei Mengen  $A$  und  $B$  folgt aus  $A \sim B$  auch  $B \sim A$ . Sie ist *transitiv*, d.h. für drei Mengen  $A, B, C$  folgt aus  $A \sim B$  und  $B \sim C$  auch  $A \sim C$ .

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt *Äquivalenzrelation*. Die Gleichmächtigkeit ist also eine Äquivalenzrelation.

**Definition 2.34.** Eine Menge heißt *abzählbar*, falls sie gleichmächtig zur Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ist. Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

Abzählbare Mengen sind also (im Sinne gleicher Mächtigkeit) genauso groß wie die Menge der natürlichen Zahlen, überabzählbare Mengen sind größer. Eine Menge  $A$  ist also abzählbar, wenn es eine Bijektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  gibt, also jedem Element aus  $A$  genau eine Nummer  $n \in \mathbb{N}$  zugeordnet wird. Man kann  $A$  also schreiben als

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Beispiele für abzählbare Mengen sind

- die geraden Zahlen  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

- die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$
- die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  (Bild!!!)

Überlegen Sie sich (zumindest für die beiden ersten Beispiele) eine explizite Bijektion  $f$ ! Auch Vereinigungen endlich oder abzählbar vieler abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar. Eine schöne Veranschaulichung dazu ist *Hilberts Hotel*.

Kommen wir nun zur Mächtigkeit der reellen Zahlen.

**Satz 2.35.** *Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

*Beweis.* Wir wollen für diesen Satz zwei Beweise geben. Beide sind Widerspruchsbeweise, wir nehmen also an, dass die reellen Zahlen abzählbar sind, wir also *alle* reellen Zahlen in eine Liste  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  schreiben können. Wir konstruieren dann im Widerspruch zur Annahme eine reelle Zahl  $x$ , die nicht in dieser Liste auftaucht.

Das erste (und vielleicht anschaulichere) Argument benutzt die Dezimaldarstellung der reellen Zahlen. Das Argument heißt *Cantorsches Diagonalargument*. Die Zahl  $x$  hat die Dezimaldarstellung

$$0.a_1a_2a_3\dots,$$

wobei wir die Ziffer  $a_n = 0$  wählen, falls die  $n$ -te Ziffer von  $x_n$  verschieden von 0 ist. Ist die  $n$ -te Ziffer von  $x_n$  gleich 0, so wählen wir  $a_n = 1$ . Dann ist  $x$  eine reelle Zahl, die sich von  $x_n$  in der  $n$ -ten Dezimalstelle unterscheidet. Folglich ist  $x \neq x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die Zahl  $x$  taucht also tatsächlich nicht in der Liste auf und der Beweis ist erbracht.

Da wir die Dezimaldarstellung bei unserem axiomatischen Zugang zu den reellen Zahlen noch nicht zur Verfügung haben (das werden wir im Kapitel über Reihen nachholen), geben wir noch eine zweite Konstruktion für  $x$  an, die den Satz 2.31 benutzt. Die Intervallschachtelung konstruieren wir induktiv. Wir beginnen mit dem Intervall  $I_1 = [x_1 + 1, x_1 + 2]$ . Dann ist sicher  $x_1 \notin I_1$ . Haben wir das Intervall  $I_{n-1}$  schon konstruiert, dann zerlegen wir es in drei abgeschlossene Teilintervalle und wählen als  $I_n$  eines der Teilintervalle, das  $x_n$  nicht enthält. Ein solches Teilintervall gibt es sicher, da  $x_n$  höchstens in zwei der Teilintervalle liegen kann. Also ist  $x_n \notin I_n$ . Nach Konstruktion ist  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$  eine Intervallschachtelung. Nach Satz 2.31 gibt es ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit muss aber  $x$  verschieden von allen  $x_n$  sein, es taucht also nicht in der Liste auf und der Beweis ist wieder beendet.  $\square$

### 3 Folgen

In diesem Kapitel beginnen wir die Untersuchung von *Grenzprozessen*. Sie gehören zu den wichtigsten Prinzipien der Mathematik und bilden das Fundament der Analysis. Wir untersuchen hier zunächst den Begriff der *Konvergenz einer Zahlenfolge*. Als motivierendes Beispiel betrachten wir die Flächenberechnung des Kreises, wie sie Archimedes mit Hilfe der Exhaustionsmethode (d.h. Ausschöpfungsmethode) durchgeführt hat.

Dazu beschrieb er in einen Kreis vom Radius 1 regelmäßige  $n$ -Ecke ein. Für den Flächeninhalt  $A_n$  dieser  $n$ -Ecke kann man elementargeometrisch eine Rekursionsformel herleiten, mit der man einfach  $A_{2n}$  aus  $A_n$  berechnen kann. Archimedes startete mit dem regelmäßigen Sechseck: Die *Zahlenfolge*

$$A_6 = 2.5981, A_{12} = 3.0000, A_{24} = 3.1058, A_{48} = 3.1326, A_{96} = 3.1394, A_{192} = 3.1410 \dots$$

*konvergiert* recht schnell gegen den Flächeninhalt  $\pi$  des Kreises.

Auf diese Weise fand Archimedes die guten Schranken

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

#### 3.1 Der Folgenbegriff und Konvergenz

**Definition 3.1.** Sei  $X$  eine Menge. Eine *Folge* in  $X$  ist eine Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Mit der Bezeichnung  $a_n := a(n)$  schreibt man die Folge dann als  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  oder  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_n)$  oder  $(a_1, a_2, \dots)$ .

Wir werden in diesem Kapitel Zahlenfolgen betrachten, also Folgen in  $X = \mathbb{R}$  und in  $X = \mathbb{C}$ . Diese nennt man *reelle Folgen* bzw. *komplexe Folgen*. Jede reelle Folge ist natürlich auch eine komplexe Folge.

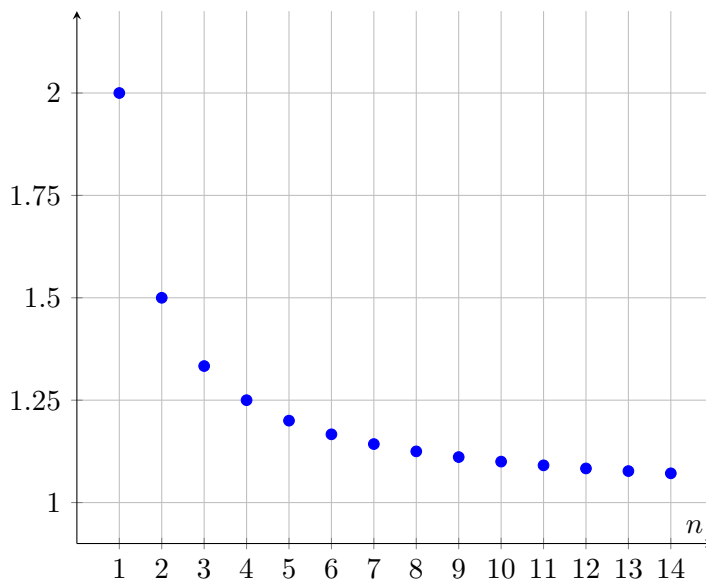
**Beispiel 3.2.** Die Folge  $(1, 4, 9, 16, \dots) = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  ist die Folge der Quadratzahlen.

**Beispiel 3.3.** Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  ist  $(z, z^2, z^3, \dots) = (z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge der Potenzen von  $z$ . Veranschaulichen Sie sich diese Folge für  $z = \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, i, 2i$  in der Gaußschen Zahlenebene!

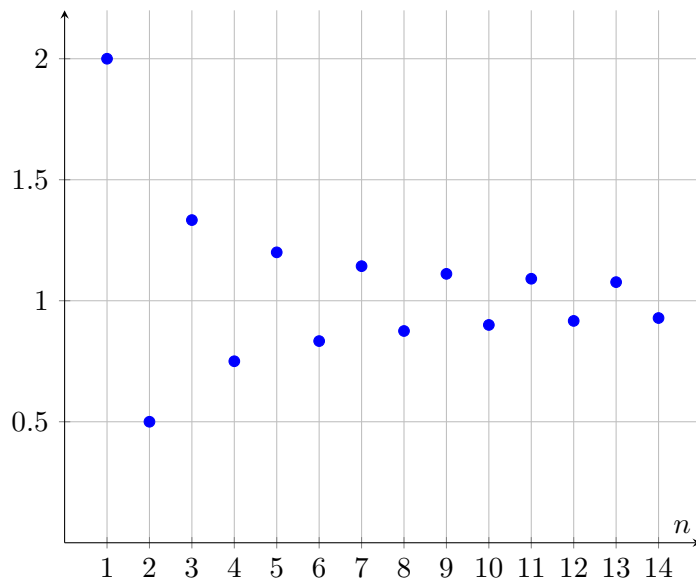
**Beispiel 3.4.** Sei  $f_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ . Dann ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine *Folge von Funktionen*. Auch solche Folgen werden wir später betrachten.

Komplexe Folgen kann man sich als das Durchlaufen der Punkte  $a_1, a_2, \dots$  in der Gaußschen Zahlenebene vorstellen. Reelle Folgen kann man sich auch durch ihren (diskreten) Graph veranschaulichen.

Die Folge  $(a_n) = (1 + \frac{1}{n})$



Die Folge  $(a_n) = (1 + \frac{(-1)^n}{n})$



Der Konvergenzbegriff faßt die Eigenschaft gewisser Zahlenfolgen  $(a_n)$ , für wachsendes  $n$  beliebig nahe an einen Grenzwert  $a \in \mathbb{C}$  zu streben. Die Nähe fassen wir dabei durch den Abstand  $|a_n - a|$ , beliebig nahe heißt kleiner als jedes vorgegebene  $\varepsilon > 0$  und für wachsendes  $n$  meint für *genügend großes*  $n$ . Damit kommen wir zur wichtigen Definition der Konvergenz.

**Definition 3.5.** Eine komplexe Folge  $(a_n)$  heißt *konvergent*, falls es ein  $a \in \mathbb{C}$  gibt mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a| < \varepsilon$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$ .

In diesem Fall heißt  $a$  *Grenzwert* oder *Limes* der Folge  $(a_n)$  und man schreibt  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  oder auch kurz  $a = \lim a_n$ . Ist  $\lim a_n = 0$ , so heißt die Folge  $(a_n)$  *Nullfolge*. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.



Formalisiert lautet die Konvergenzeigenschaft  $a_n \rightarrow a$  also:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Hierbei hängt das  $n_0$  von  $\varepsilon$  ab, weshalb man manchmal der Deutlichkeit halber  $n_0(\varepsilon)$  schreibt.

Wir wollen diesen wichtigen Begriff noch weiter erläutern. Dazu geben wir zunächst eine geometrische Deutung der Konvergenz einer Folge  $(a_n)$  gegen  $a \in \mathbb{C}$  in der Gaußschen Zahlenebene. Wir betrachten für gegebenes  $\varepsilon > 0$  die offene Kreisscheibe

$$U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$$

mit Mittelpunkt  $a$  und Radius  $\varepsilon$ . Diese Kreisscheibe heißt  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ . Die Konvergenzeigenschaft bedeutet dann, dass in *jeder* solchen Kreisscheibe *bis auf endlich viele Ausnahmen alle* Folgenglieder  $a_n$  liegen. Für *bis auf endlich viele Ausnahmen alle*  $n$  sagt man auch *fast alle*  $n \in \mathbb{N}$  oder *für genügend großes*  $n \in \mathbb{N}$ . Man kann die Konvergenzbedingung also auch so formulieren:

In jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegen fast alle Folgenglieder  $a_n$ .

Übrigens nennt man jede Obermenge  $U \supseteq U_\varepsilon(a)$  eine *Umgebung* von  $a$ . Dann kann man auch formulieren:

$$a = \lim a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Jede Umgebung von } a \text{ enthält fast alle } a_n.$$

Offensichtlich gilt

$$a_n \rightarrow a \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n - a) \text{ ist Nullfolge.}$$

**Beispiel 3.6.** Die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge. Dies ist eine Umformulierung der archimedischen Eigenschaft: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Damit gilt auch für alle  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Wir wollen uns zunächst überlegen, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist. Dies ist eine Konsequenz der Dreiecksungleichung. Wir führen einen Widerspruchsbeweis, nehmen also  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b$  mit  $a \neq b$  an. Dann definieren wir  $\varepsilon > 0$  durch  $2\varepsilon = |a - b|$  und wählen  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  mit

$$\begin{aligned} |a_n - a| < \varepsilon & \quad \text{für } n \geq n_1 \\ |a_n - b| < \varepsilon & \quad \text{für } n \geq n_2. \end{aligned}$$

Wählen wir nun ein beliebiges  $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ , so erhalten wir den Widerspruch

$$2\varepsilon = |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Am folgenden Beispiel wollen wir uns überlegen, wie man einen Konvergenzbeweis *findet* und wie man ihn anschließend kurz aufschreibt.

**Beispiel 3.7.** Die Folge  $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge.

Wir müssen zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  finden, so dass die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0$$

gilt. Diese Ungleichung ist aber äquivalent zu

$$\frac{1}{n} \leq \varepsilon^2 \text{ für } n \geq n_0.$$

Ein  $n_0$ , dass diese Ungleichung erfüllt, können wir wieder mit der archimedischen Eigenschaft finden. Damit gilt die Ungleichung dann auch für alle  $n \geq n_0$ .

Nun dazu, wie man diesen Beweis kurz und elegant aufschreibt.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Die archimedische Eigenschaft liefert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon^2$ . Dann folgt  $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ .  $\square$

Wir schließen einige Bemerkungen dazu an, die das Beweisen von Konvergenzaussagen für Folgen vereinfachen können.

**Bemerkung.** Sei  $(a_n)$  eine komplexe Folge und  $a \in \mathbb{C}$ .

- (i) Falls man zeigen kann: Es gibt ein  $K > 0$  mit der Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < K\varepsilon,$$

dann gilt  $a_n \rightarrow a$ .

- (ii) Ist  $(b_n)$  eine Folge mit  $b_n = a_n$  für genügend großes  $n$ , so gilt

$$a_n \rightarrow a \iff b_n \rightarrow a.$$

Das Konvergenzverhalten einer Folge hängt also nicht ab von endlich vielen Anfangsgliedern der Folge.

- (iii) Ist  $(a_n)$  eine Nullfolge und  $(b_n)$  eine Folge mit  $|b_n| \leq K|a_n|$  für ein  $K > 0$  und fast alle  $n$ , so ist auch  $(b_n)$  eine Nullfolge.

**Definition 3.8.** Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{C}$  heißt *beschränkt*, wenn es ein  $R > 0$  gibt, so dass  $|a| \leq R$  für alle  $a \in A$  gilt. Eine Folge  $(a_n)$  heißt *beschränkt*, wenn die Menge  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  der Folgenglieder beschränkt ist.

**Satz 3.9.** *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

*Beweis.* Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $a$ . Wenden wir die Konvergenzdefinition für  $\varepsilon = 1$  an, so finden wir ein  $n_0$  mit

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| < |a| + 1$$

wobei die letzte Implikation aus der Dreiecksungleichung folgt. Setzen wir

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}$$

so erhalten wir  $|a_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die Folge  $(a_n)$  ist also beschränkt.  $\square$

Kommen wir zur Berechnung einiger wichtiger Grenzwerte.

**Beispiel 3.10.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Wir setzen  $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$  und müssen dann  $x_n \rightarrow 0$  zeigen. Aus dem binomischen Satz folgt

$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Umstellen nach  $x_n$  liefert für  $n \geq 2$  die Abschätzung

$$x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Da  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  eine Nullfolge ist, ist nach Bemerkung (iii) auch  $x_n$  eine Nullfolge.

**Beispiel 3.11.** Sei  $a > 0$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Sei zunächst  $a \geq 1$ . Dann ist  $n > a$  für genügend großes  $n$  und somit

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 \leq \sqrt[n]{n} - 1 = |\sqrt[n]{n} - 1|$$

für genügend großes  $n$ . Damit ist  $(\sqrt[n]{a} - 1)$  nach Bemerkung (ii) und (iii) ebenfalls eine Nullfolge. Den Fall  $a < 1$  kann man analog behandeln oder auf den Fall  $a > 1$  mit den unten aufgeführten Rechenregeln für Grenzwerte zurückführen.

**Beispiel 3.12.** Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0.$$

Für  $z = 0$  ist die Behauptung klar. Zum Beweis für  $z \neq 0$  setzen wir  $x > 0$  so, dass  $|z| = \frac{1}{1+x}$  ist. Dann erhalten wir aus der Bernoulli-Ungleichung oder der binomischen Formel  $(1+x)^n \geq 1+nx$  und damit

$$|z^n| = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{x} \frac{1}{n}.$$

Da  $(\frac{1}{n})$  eine Nullfolge ist, ist nach Bemerkung (iii) auch  $z^n$  eine Nullfolge.

**Beispiel 3.13.** Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > 1$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0.$$

Wir setzen  $|z| = 1 + x$  mit  $x > 0$ . Ist  $n > 2k$ , so ergibt sich aus der binomischen Formel

$$|z|^n = (1+x)^n > \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1} > \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} x^{k+1}.$$

Es folgt

$$\left| \frac{n^k}{z^n} \right| = \frac{n^k}{|z|^n} < \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \frac{1}{n} =: K \frac{1}{n}.$$

Da  $(\frac{1}{n})$  eine Nullfolge ist, ist also auch  $(\frac{n^k}{z^n})$  eine Nullfolge.

Der folgende Satz beinhaltet wichtige Rechenregeln für konvergente komplexe Folgen.

**Satz 3.14.** Seien  $(a_n), (b_n)$  komplexe Folgen mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann gilt:

(i)  $\overline{a_n} \rightarrow \overline{a}$

(ii)  $|a_n| \rightarrow |a|$

(iii)  $\operatorname{Re} a_n \rightarrow \operatorname{Re} a$  und  $\operatorname{Im} a_n \rightarrow \operatorname{Im} a$

(iv)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$

(v)  $a_n b_n \rightarrow ab$

(vi) Falls  $b \neq 0$  ist, ist  $b_n \neq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ .

Die Regeln kann man auch einprägsamer schreiben. Zum Beispiel bedeutet (i)

$$\lim \overline{a_n} = \overline{\lim a_n}.$$

Das muss man aber korrekt lesen als: Falls  $\lim a_n$  existiert, dann existiert auch  $\lim \overline{a_n}$  und es gilt

$$\lim \overline{a_n} = \overline{\lim a_n}.$$

Analog bedeutet (iii)

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

Was ist hier die Voraussetzung? Schreiben Sie auch die anderen Eigenschaften in dieser einprägsamen Schreibweise!

*Beweis.* (i) Sei  $\varepsilon > 0$  und sei  $n_0$  so gewählt, dass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$  gilt. Dann folgt für  $n \geq n_0$  auch

$$|\overline{a_n} - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a| < \varepsilon$$

und damit die behauptete Konvergenz  $\overline{a_n} \rightarrow \overline{a}$ .

(ii) Sei  $\varepsilon > 0$  und sei  $n_0$  so gewählt, dass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$  gilt. Dann folgt für  $n \geq n_0$  mit der Dreiecksungleichung auch

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

und damit die behauptete Konvergenz  $|a_n| \rightarrow |a|$ .

(iii) Sei  $\varepsilon > 0$  und sei  $n_0$  so gewählt, dass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$  gilt. Dann folgt für  $n \geq n_0$  auch

$$|\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a| = |\operatorname{Re}(a_n - a)| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

und damit die behauptete Konvergenz  $\operatorname{Re} a_n \rightarrow \operatorname{Re} a$ . Die Konvergenz der Imaginärteile beweist man analog.

(iv) Sei  $\varepsilon > 0$  und seien  $n_1$  und  $n_2$  so gewählt, dass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für  $n \geq n_1$  und  $|b_n - b| < \varepsilon$  für  $n \geq n_2$  gilt. Dann folgt für  $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$  mit der Dreiecksungleichung auch

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$$

und damit die behauptete Konvergenz  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ .

(v) Wir benutzen die Abschätzung

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |b_n| |a_n - a| + |a| |b_n - b|.$$

Nun ist  $(b_n)$  als konvergente Folge beschränkt, sagen wir  $|b_n| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann erhalten wir

$$|a_n b_n - ab| \leq M |a_n - a| + |a| |b_n - b|.$$

Da  $(a_n - a)$  und  $(b_n - b)$  Nullfolgen sind, ist auch  $(M |a_n - a| + |a| |b_n - b|)$  eine Nullfolge, also auch  $(a_n b_n - ab)$ . Es folgt die behauptete Konvergenz  $a_n b_n \rightarrow ab$ .

(vi) Nach (ii) gilt  $|b_n| \rightarrow |b| > 0$ , also gibt es zu  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|b_n| > |b| - \varepsilon = \frac{|b|}{2}$  für  $n \geq n_0$ . Damit ist  $b_n \neq 0$  für  $n \geq n_0$ . Weiter folgt für  $n \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b - b_n|.$$

Wegen  $b_n \rightarrow b$  folgt also  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ . Mit (v) folgt dann auch  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ . □

Mittels dieser Regeln und den schon bekannten Grenzwerten lassen sich schon sehr viele Grenzwerte berechnen. Zum Beispiel ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{42 + 2\sqrt{n} + 23n}{n} = 42 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} 23 = 0 + 0 + 23 = 23.$$

Ein weiteres Beispiel folgt:

**Beispiel 3.15.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ . Für  $k = 1$  haben wir das schon gezeigt. Der Rest folgt per vollständiger Induktion aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Weiter zeigt Satz 3.14 auch:

- Grenzwerte reeller Folgen sind reell.
- Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Realteile und der Imaginärteile konvergieren. In diesem Fall ist

$$\lim a_n = \lim \operatorname{Re} a_n + i \lim \operatorname{Im} a_n.$$

Für reelle Folgen liefert die Ordnung der reellen Zahlen einige weitere nützliche Regeln für Grenzwerte, die wir im folgenden Satz zusammenfassen.

**Satz 3.16.** Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  reelle Folgen. Dann gilt:

- (i) Aus  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  und  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  folgt  $a \leq b$ .
- (ii) Ist  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \in [b, c]$  für fast alle  $n$ , so ist auch  $a \in [b, c]$ .
- (iii) Ist  $a_n \rightarrow a$  und  $c_n \rightarrow a$  und  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für fast alle  $n$ , dann ist die Folge  $b_n$  konvergent mit  $b_n \rightarrow a$ . Diese Regel wollen wir in Zukunft Sandwichregel nennen.

*Beweis.* (i) Wegen  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  und  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq b + \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ . Es folgt also  $a - b \leq 2\varepsilon$ , und zwar für jedes  $\varepsilon > 0$ . Also ist  $a - b \leq 0$  und folglich  $a \leq b$ .

(ii) Hier betrachten wir neben der Folge  $(a_n)$  noch die konstanten Folgen  $(b_n)$  mit  $b_n = b$  und  $(c_n)$  mit  $c_n = c$ . Nach Voraussetzung ist  $b_n \leq a_n \leq c_n$  für fast alle  $n$ . Ebenfalls nach Voraussetzung ist  $a_n \rightarrow a$ . Außerdem ist offensichtlich  $b_n \rightarrow b$  und  $c_n \rightarrow c$ . Mit (i) folgt  $b \leq a \leq c$ .

(iii) Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \leq b_n$  gilt  $a - b_n \leq a - a_n < \varepsilon$  für fast alle  $n$ . Wegen  $c_n \rightarrow a$  und  $b_n \leq c_n$  gilt  $b_n - a \leq c_n - a < \varepsilon$  für fast alle  $n$ . Zusammen folgt  $|b_n - a| < \varepsilon$  für fast alle  $n$  und damit die behauptete Konvergenz  $b_n \rightarrow a$ . □

**Beispiel 3.17.** Für  $a, b \geq 0$  gilt  $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$ . Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $b \geq a$ . Dann folgt mit der *Sandwichregel* (iii) aus den Ungleichungen

$$b = \sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2b^n} = \sqrt[n]{2}b$$

und  $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$  sofort  $\sqrt[n]{a^n + b^n} = b = \max\{a, b\}$ .

## 3.2 Monotone Folgen

In diesem Abschnitt wollen wir uns weiter mit *reellen* Folgen beschäftigen und die Ordnungsstruktur ausnutzen. Wir wollen einsehen, dass man für *monotone* Folgen zeigen kann, dass sie konvergieren (unter der zusätzlichen Voraussetzung der Beschränktheit), ohne explizit den Grenzwert bestimmen zu können. Als Anwendung werden wir die *Eulersche Zahl*  $e$  als Grenzwert einer monotonen Folge finden.

**Definition 3.18.** Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt *monoton wachsend*, falls  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$  gilt. Sie heißt *monoton fallend*, falls  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$  gilt. Sie heißt *monoton*, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist. Falls sogar  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$  (bzw.  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ ) gilt, nennen wir die Folge  $(a_n)$  *strikt monoton wachsend* (bzw. *strikt monoton fallend*).

Im folgenden bezeichnen wir kurz mit  $\sup a_n$  ( $\inf a_n$ ) das Supremum (Infimum) der Menge der Folgenglieder einer beschränkten reellen Folge  $(a_n)$ .

**Beispiel 3.19.** Die Folge  $(\frac{1}{n})$  ist (strikt) monoton fallend. Sie konvergiert gegen  $0 = \inf \frac{1}{n}$ . Die Folge  $(-\frac{1}{n})$  ist (strikt) monoton wachsend. Sie konvergiert gegen  $0 = \sup (-\frac{1}{n})$ . Ist  $(a_n)$  (strikt) monoton wachsend, so ist  $(-a_n)$  (strikt) monoton fallend.

**Satz 3.20** (Monotonieprinzip). *Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Außerdem ist  $a_n \rightarrow \sup a_n$  ( $a_n \rightarrow \inf a_n$ ), falls  $(a_n)$  monoton wachsend (fallend) und beschränkt ist.*

*Beweis.* Da konvergente Folgen beschränkt sind, genügt es zu zeigen, dass  $a_n \rightarrow a := \sup a_n$  für eine monoton wachsende und beschränkte Folge  $(a_n)$  gilt. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  beliebig. Die Definition des Supremums liefert dann ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_{n_0} > a - \varepsilon$ . Aus der Monotonie der Folge ergibt sich damit  $a_n > a - \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ . Nun ist aber stets  $a_n \leq a$ , da  $a$  eine obere Schranke für die Folgenglieder  $a_n$  ist. Zusammen haben wir also  $a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$ , also  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, ist  $a_n \rightarrow a$  gezeigt. □

**Beispiel 3.21** (Eulersche Zahl). Wir betrachte die beiden Folgen  $(a_n), (b_n)$  gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

Wir zeigen die Monotonie beider Folgen.

Zunächst zeigen wir, dass  $(a_n)$  monoton wachsend ist. Dazu betrachten wir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}$$

und benutzen die Bernoulli-Ungleichung  $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$  für  $x = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1$ , um

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{n+1}{n} = 1$$

zu erhalten.

Analog zeigen wir, dass  $(b_n)$  monoton fallend ist. Dazu betrachten wir

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n+1} = 1,$$

wobei wir in der Abschätzung wieder die Bernoulli-Ungleichung benutzt haben.

Wir erhalten also

$$2 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 = 4.$$

Also sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  monotone und beschränkte Folgen und damit konvergent mit

$$a_n \rightarrow a := \sup a_n \quad \text{und} \quad b_n \rightarrow b := \inf b_n.$$

Wir zeigen nun noch, dass die Grenzwerte übereinstimmen, also  $a = b$  ist. Dazu betrachten wir

$$b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{a_n}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

Folglich ist  $a_n \leq b_n \leq a_n + \frac{4}{n}$  und die Sandwichregel liefert  $a = \lim a_n = \lim b_n = b$ .

Der gemeinsame Grenzwert der Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  wird *Eulersche Zahl* genannt und mit  $e$  bezeichnet:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \inf \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Wir bemerken noch, dass die Monotonie beider Folgen sogar strikt ist, da die Bernoulli-Ungleichung in unserer Anwendung eine strikte Ungleichung ist.

### 3.3 Teilfolgen, Satz von Bolzano-Weierstraß

Ist  $(n_1, n_2, \dots)$  eine strikt monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

Teilfolge der Folge  $(a_n)$ . Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  folgt offensichtlich  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$  für jede Teilfolge  $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ . Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert also ebenfalls, und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

Mit Hilfe des Teilfolgenbegriffs und des Monotonieprinzips kann man den wichtigen *Auswahlsatz von Bolzano-Weierstraß* einsehen.

**Satz 3.22.** *Jede beschränkte komplexe Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Wir zeigen den Satz zunächst für eine beschränkte *reelle* Folge  $(a_n)$ . Dazu nennen wir  $m \in \mathbb{N}$  einen *Peak* der Folge  $(a_n)$ , falls für  $n > m$  immer  $a_n < a_m$  gilt. Hat die Folge  $(a_n)$  unendlich viele Peaks  $n_1 < n_2 < \dots$ , so ist die Teilfolge  $(a_{n_k})$  strikt monoton fallend und somit nach dem Monotonieprinzip konvergent. Hat die Folge  $(a_n)$  nur endlich viele Peaks, so wählen wir  $n_1$  größer als den größten Peak. Falls es überhaupt keinen Peak gibt, wählen wir  $n_1$  beliebig, z.B.  $n_1 = 1$ . Damit ist  $n_1$  kein Peak und wir finden  $n_2 > n_1$  mit  $a_{n_1} \leq a_{n_2}$ . Auch  $n_2$  ist kein Peak, also finden wir  $n_3 > n_2$  mit  $a_{n_2} \leq a_{n_3}$ . Setzen wir dies induktiv fort, erhalten wir eine monoton wachsende und damit konvergente Teilfolge. Damit ist der Satz für reelle Folgen richtig.

Ist nun  $(a_n)$  eine beschränkte *komplexe* Folge, so stellen wir  $a_n = x_n + iy_n$  mit Realteil und Imaginärteil dar. Dann sind die Folgen  $(x_n)$  und  $(y_n)$  reell und beschränkt. Nach dem gerade gezeigten finden wir eine konvergente Teilfolge von  $(x_n)$  und anschließend eine konvergente Teilfolge der entsprechenden Teilfolge von  $(y_n)$ . Seien  $(n_1, n_2, \dots)$  die Indizes dieser nach zwei Schritten entstandenen Teilfolgen, für die also  $(x_{n_k})$  und  $(y_{n_k})$  konvergieren. Dann konvergiert auch die Folge  $(a_{n_k})$ .  $\square$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß wird oft in einer Version mit dem Begriff *Häufungspunkt* formuliert.

**Definition 3.23.** Sei  $(a_n)$  eine komplexe Folge und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann heißt  $a$  *Häufungspunkt* oder *Häufungswert* der Folge  $(a_n)$ , wenn jede  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  unendlich viele Folgenglieder  $(a_n)$  enthält, wenn es also unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Vergleichen Sie das mit der Konvergenz  $a_n \rightarrow a$ : hier müssen *fast alle* Folgenglieder in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung liegen. Insbesondere ist also der Grenzwert einer konvergenten Folge ein Häufungspunkt. Offenbar ist  $a$  genau dann Häufungspunkt von  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert. Die Menge der Häufungspunkte einer Folge ist gerade die Menge der Grenzwerte konvergenter Teilfolgen. Dies führt zu einer alternativen Formulierung des Satzes von Bolzano-Weierstraß:

**Satz 3.24.** *Jede beschränkte komplexe Folge besitzt einen Häufungspunkt.*

Eine komplexe Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt hat.

Die Menge der Häufungspunkte einer beschränkten reellen Folge  $(a_n)$  ist eine beschränkte Menge in  $\mathbb{R}$ . Das Supremum dieser Menge heißt *Limes Superior* der Folge  $(a_n)$  und wird mit  $\limsup a_n$



bezeichnet. Das Infimum heißt *Limes Inferior* und wird mit  $\liminf a_n$  bezeichnet. Offensichtlich gelten die Ungleichungen

$$\inf a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup a_n.$$

Limes Superior und Limes Inferior sind selbst Häufungspunkte von  $(a_n)$ . Wir überlegen uns das hier für  $a = \limsup a_n$ . Nehmen wir an, dass  $a$  kein Häufungspunkt ist, dann existiert eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , die nur endlich viele  $a_n$  enthält. Es können aber auch nur endlich viele  $a_n$  die Ungleichung  $a_n \geq a + \varepsilon$  erfüllen, ansonsten würde es wegen des Satzes von Bolzano-Weierstrass einen Häufungspunkt größer als  $a$  geben. Also gibt es keinen Häufungspunkt  $h > a - \varepsilon$  und es folgt der Widerspruch  $a \leq a - \varepsilon$ .

Also ist  $\limsup a_n$  der *größte* Häufungspunkt von  $(a_n)$  und  $\liminf a_n$  der kleinste.

Wir zeigen noch die nützlichen Formeln

$$\liminf a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} a_n \quad \text{und} \quad \limsup a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} a_n.$$

Da  $(a_n)$  beschränkt ist, existieren  $b_k = \inf_{n \geq k} a_n$  und  $c_k = \sup_{n \geq k} a_n$  und es gilt  $b_k \leq c_k$ . Außerdem ist die Folge  $(b_k)$  monoton wachsend und die Folge  $(c_k)$  monoton fallend, es existieren nach Satz 3.20  $b = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} a_n$  und  $c = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} a_n$ . Wir setzen noch  $a = \liminf a_n$  und zeigen  $a = b$ . Die Gleichung für  $\limsup a_n$  folgt analog.

Da  $a$  Häufungspunkt von  $(a_n)$  ist, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  und jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $n \geq k$  mit  $a_n < a + \varepsilon$ . Also ist  $b_k = \inf_{n \geq k} a_n < a + \varepsilon$  für alle  $k$ . Es folgt  $b = \lim b_k \leq a + \varepsilon$ , und da dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt auch  $b \leq a$ . Weiter gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  nur endlich viele  $a_n < a - \varepsilon$ , woraus  $b_k = \inf_{n \geq k} a_n \geq a - \varepsilon$  für genügend großes  $k$  und schließlich  $b = \lim b_k \geq a - \varepsilon$  folgt. Wieder ist  $\varepsilon > 0$  beliebig und damit  $b \geq a$ . Zusammen erhalten wir wie behauptet  $b = a$ .

**Beispiel 3.25.** Die Folge  $(a_n)$  sei gegeben durch  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ . Für die Teilfolge  $(a_{2n})$  finden wir  $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1$ . Also ist 1 ein Häufungspunkt. Für die Teilfolge  $(a_{2n+1})$  ist  $a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \rightarrow -1$ . Also ist -1 ein Häufungspunkt. Weitere Häufungspunkte gibt es nicht. Wir haben also

$$\liminf a_n = -1 \quad \text{und} \quad \limsup a_n = 1.$$

**Beispiel 3.26.** Sei  $(a_n)$  eine Aufzählung aller rationalen Zahlen im Intervall  $[0, 1]$ . Da die rationalen Zahlen in  $[0, 1]$  dicht in  $[0, 1]$  liegen, finden wir zu jedem  $x \in [0, 1]$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ , die gegen  $x$  konvergiert. Also ist die Menge der Häufungspunkte von  $(a_n)$  das ganze Intervall  $[0, 1]$  und damit überabzählbar. Insbesondere haben wir für jede solche Folge

$$\liminf a_n = 0 \quad \text{und} \quad \limsup a_n = 1.$$

Wir werden diesen Begriffen beim Studium der Konvergenz von Potenzreihen wiederbegegnen.

### 3.4 Cauchyfolgen

In diesem Abschnitt wollen wir ein weiteres Kriterium kennenlernen, mit dem man ohne die Kenntnis des Grenzwertes auf die Konvergenz einer Folge schließen kann. Dieses Kriterium hängt eng mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen zusammen. Zentral ist der Begriff der Cauchyfolge.

**Definition 3.27.** Eine komplexe Folge  $(a_n)$  heißt *Cauchyfolge*, falls sie die folgende Eigenschaft hat:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  ist für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n, m \geq n_0$ .

Vergleichen Sie diese Definition mit der Konvergenzdefinition! Formal liest sich die Cauchyfolgenbedingung so:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Für eine komplexe Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = x_n + iy_n$  und  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(a_n) \text{ ist Cauchyfolge} \iff (x_n) \text{ und } (y_n) \text{ sind Cauchyfolgen.}$$

Dies folgt aus

$$|x_n - x_m|, |y_n - y_m| \leq |a_n - a_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}.$$

Das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts ist

**Satz 3.28.** *Sei  $(a_n)$  eine komplexe Folge. Dann ist  $(a_n)$  genau dann konvergent, wenn  $(a_n)$  eine Cauchyfolge ist.*

*Beweis.* Wir überlegen uns zunächst die einfache Implikation: Ist  $(a_n)$  konvergent, dann ist  $(a_n)$  eine Cauchyfolge. Dazu sei  $a_n \rightarrow a$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann finden wir ein  $n_0$  so dass  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann für  $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und die Cauchyfolgeneigenschaft ist erwiesen.

Für die andere Implikation ist zu zeigen: Ist  $(a_n)$  eine Cauchyfolge, dann ist  $(a_n)$  konvergent. Nach obiger Bemerkung genügt es, dies für reelle Folgen zu zeigen. Zunächst zeigen wir dazu, dass eine Cauchyfolge beschränkt ist. Dazu wählen wir zu  $\varepsilon = 1$  ein  $n_0$  mit  $|a_n - a_m| < 1$  für  $n, m \geq n_0$ . Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$|a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$$

für  $n \geq n_0$ . Damit ist  $\max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$  eine Schranke für  $|a_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , vergleiche den entsprechenden Beweis für Beschränktheit konvergenter Folgen.

Aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt nun die Existenz einer konvergenten Teilfolge von  $(a_n)$ , deren Grenzwert wir  $a$  nennen. Wir zeigen schließlich, dass  $a$  sogar Grenzwert der gesamten Folge  $(a_n)$  ist. Dazu fixieren wir  $\varepsilon > 0$  und wählen  $n_0$  so, dass  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  für  $n, m \geq n_0$  ist. Dies ist die Cauchy-Folgen-Eigenschaft. Aus der gegen  $a$  konvergenten Teilfolge wählen wir nun ein  $a_m$  mit  $m \geq n_0$  und  $|a_m - a| < \varepsilon$ . Die Dreiecksungleichung liefert dann für jedes  $n \geq n_0$

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_m| + |a_m - a| < 2\varepsilon,$$

was die Konvergenz  $a_n \rightarrow a$  zeigt. □

Wir diskutieren jetzt noch einmal die Vollständigkeit der reellen Zahlen. Für diese Eigenschaft gibt es eine Reihe von äquivalenten Formulierungen, die im Zusammenhang mit zentralen Resultaten aus der Vorlesung stehen. Dazu sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann sind die folgenden Aussagen über  $K$  äquivalent:

1.  $K$  ist ordnungsvollständig, d.h. jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von  $K$  hat ein Supremum. (das war unser Axiom der Vollständigkeit!)

2.  $K$  ist archimedisch (d.h. die natürlichen Zahlen in  $K$  sind unbeschränkt) und jede Intervallschachtelung aus abgeschlossenen Intervallen hat einen nichtleeren Durchschnitt.
3. Jede monotone und beschränkte Folge in  $K$  besitzt einen Grenzwert.
4. Jede beschränkte Folge in  $K$  besitzt eine konvergente Teilfolge (Bolzano-Weierstraß).
5.  $K$  ist archimedisch und jede Cauchyfolge in  $K$  konvergiert.

Dass die Eigenschaft 1. die Eigenschaften 2.-5. impliziert, haben wir in der Vorlesung gezeigt. Es ist eine gute Übungsaufgabe, auch die umgekehrten Implikationen zu zeigen.

Wir schließen dieses Kapitel mit der Einführung des Begriffs der bestimmten Divergenz (in manchen Büchern uneigentliche Konvergenz) einer *reellen* Folge. Dazu benutzen wir die Symbole  $\infty = +\infty$  und  $-\infty$ . Sei also  $(a_n)$  eine reelle Folge. Dann heißt  $(a_n)$  *bestimmt divergent* gegen  $+\infty$ , falls gilt

$$\forall R > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n > R.$$

Dafür schreiben wir  $a_n \rightarrow +\infty$  oder  $\lim a_n = +\infty$ . Weiter heißt  $(a_n)$  *bestimmt divergent* gegen  $-\infty$ , falls gilt

$$\forall R > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -R.$$

Dafür schreiben wir  $a_n \rightarrow -\infty$  oder  $\lim a_n = -\infty$ .

Zum Beispiel gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n}) = -\infty.$$

Hingegen ist die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$  nicht bestimmt divergent. Viele der Rechenregeln für Grenzwerte reeller Folgen lassen sich auf uneigentliche Grenzwerte verallgemeinern. Ist zum Beispiel  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  und  $b_n \rightarrow +\infty$ , so gilt  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$  und  $a_n - b_n \rightarrow -\infty$ . Allerdings muss man vorsichtig sein, aus  $a_n \rightarrow +\infty$  und  $b_n \rightarrow -\infty$  kann man nichts über die Konvergenz von  $a_n + b_n$  schlussfolgern! Überlegen Sie sich an dieser Stelle, welche Rechenregeln gelten und finden Sie Gegenbeispiele für Regeln, die nicht gelten!

## 4 Reihen

Reihen sind spezielle Folgen  $(s_n)$ , die mit Hilfe der Zuwächse  $a_n = s_n - s_{n-1}$  beschrieben werden, also

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sie werden sich als wichtiges Hilfsmittel zur Konstruktion und Behandlung von Funktionen herausstellen.

### 4.1 Der Reihenbegriff, Konvergenz und Eigenschaften

Sei also  $(a_n)$  eine komplexe Folge und

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann heißt die Folge  $(s_n)$  eine *unendliche Reihe* oder kurz *Reihe*, für die man auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{oder} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{oder kurz} \quad \sum a_k$$

schreibt. Die Zuwächse  $a_k$  heißen *Glieder der Reihe* und die Summen  $s_n$  heißen *Partialsommen* der Reihe. Ist die Folge der Partialsommen  $(s_n)$  konvergent mit  $s_n \rightarrow s$ , so heißt die Reihe  $\sum a_k$  konvergent und wir schreiben auch für den Grenzwert  $s$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Reihen, die nicht konvergent sind, heißen *divergent*.

Sind die Reihenglieder  $a_k$  reell und gilt  $s_n \rightarrow \infty$  oder  $s_n \rightarrow -\infty$ , so schreibt man auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$$

und nennt die Reihe *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent*.

Natürlich kann man auch Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=42}^{\infty} a_k$$

betrachten, die Definition sollte nun klar sein.

Ein nicht sonderlich interessantes Beispiel sind

**Beispiel 4.1** (Endliche Reihen). Ist  $(a_k)$  eine abbrechende Folge, also  $a_k = 0$  für  $k > k_0$ , so sind die Partialsummen  $s_n$  der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  für  $n > k_0$  konstant und die Reihe somit konvergent mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{k_0} a_k.$$

Ein wesentlich spannenderes Beispiel ist das folgende

**Beispiel 4.2** (Geometrische Reihen). Ist  $(a_k)$  eine geometrische Folge, d.h.  $a_k = q^k$  für eine komplexe Zahl  $q$ , so nennt man die resultierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

eine *geometrische Reihe*. Für  $q \neq 1$  kennen Sie aus den Übungen bereits die Formel für die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

die man leicht einsieht, indem man

$$(1 - q)s_n = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

beobachtet. Da für  $|q| < 1$  die Folge  $(q^{n+1})$  eine Nullfolge ist, gilt  $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$ . Für  $|q| < 1$  ist die geometrische Reihe  $\sum q^k$  also konvergent mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Für  $q = 0$  muss man für die Gültigkeit dieser Formel  $0^0 := 1$  setzen. Für  $|q| \geq 1$  ist die geometrische Reihe divergent.

Ein weiteres wichtiges Beispiel ist

**Beispiel 4.3** (Harmonische Reihe). Die *harmonische Reihe* ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ . Diese Reihe ist bestimmt divergent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Dies sieht man ein, indem man beobachtet, dass die Partialsummen monoton wachsend sind und die Abschätzung

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

benutzt.

Aus der Definition der Reihenkonvergenz und den entsprechenden Regeln für konvergente Folgen leitet man leicht die beiden folgenden Rechenregeln ab (tatsächlich?!):

- Sind  $\sum a_k$  und  $\sum b_k$  konvergent, so ist auch  $\sum(a_k + b_k)$  konvergent mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

- Ist  $\sum a_k$  konvergent und  $c \in \mathbb{C}$ , so ist auch  $\sum ca_k$  konvergent mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Wir übersetzen jetzt das Cauchy Kriterium für die Konvergenz der Partialsummenfolge  $(s_n)$  in das *Cauchy Kriterium* für die Konvergenz der Reihe  $\sum a_k$ . Dabei ist nichts zu beweisen, wir beobachten nur, dass für die Differenz

$$s_m - s_n = \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^m a_k$$

gilt, falls  $m > n$  ist.

**Satz 4.4** (Cauchy Kriterium). *Die Reihe  $\sum a_k$  ist genau dann konvergent, wenn gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} : m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

Indem man nur den Fall  $m = n + 1$  betrachtet, erhält man für eine konvergente Reihe  $\sum a_k$  aus dem Cauchy Kriterium die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : m > n_0 \Rightarrow |a_m| < \varepsilon.$$

Das ist aber nichts anderes als die Aussage, dass  $(a_n)$  eine Nullfolge ist. Es gilt also das wichtige

**Korollar 4.5.** *Ist  $\sum a_k$  konvergent, so ist die Folge der Reihenglieder  $(a_k)$  eine Nullfolge. Ist  $(a_k)$  keine Nullfolge, so ist  $\sum a_k$  nicht konvergent.*

Auch das Monotoniekriterium liefert ein nützliches Konvergenzkriterium für Reihen mit *nicht-negativen reellen Gliedern*:

- Eine Reihe  $\sum a_k$  mit  $a_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  konvergiert genau dann, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind.

Dies liegt einfach daran, dass die Partialsummen einer solchen Reihe monoton wachsend sind.

**Beispiel 4.6.** Mit Hilfe des Monotoniekriteriums erhält man zum Beispiel die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Tatsächlich sieht man durch die Abschätzung

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{2}{2^{n-1}} < 3$$

die Beschränktheit der Partialsummen und damit die Konvergenz der Reihe. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dies sieht man durch die folgenden Betrachtungen ein.

Zunächst folgt aus dem binomischen Satz

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich einerseits

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

und damit

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Andererseits folgt für festes  $\ell \in \mathbb{N}$  auch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{\ell!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{\ell-1}{n}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

und damit

$$e \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

**Beispiel 4.7.** Das Monotoniekriterium benutzen wir jetzt, um die *Dezimalbruchentwicklung* und allgemeiner *b-adische Entwicklungen* von reellen Zahlen über den Reihenbegriff einzuführen. Sei dazu  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b \geq 2$ . Für die Dezimalbruchentwicklung ist  $b = 10$ . Auch der Fall  $b = 2$  spielt eine gewisse Rolle, die entsprechende *b-adische Entwicklung* heißt *Binärdarstellung* oder *Dualdarstellung*. Die Zahlen  $0, 1, \dots, b-1$  nennen wir jetzt *Ziffern* und schreiben für eine Folge  $z_1, z_2, z_3, \dots$  von Ziffern

$$0.z_1 z_2 z_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{b^k}.$$

Die Glieder dieser Reihe sind nichtnegativ und die Partialsummen sind beschränkt durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b-1}{b^k} = (b-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k} = (b-1) \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{b}} - 1 \right) = 1,$$

die Reihensumme ist also eine reelle Zahl in  $[0, 1]$ .

Um sich zu überlegen, dass auch jede reelle Zahl im Intervall  $[0, 1)$  in der Form  $0.z_1z_2z_3\dots$  geschrieben werden kann, brauchen wir die Definition

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

des *größten Ganzen* einer reellen Zahl  $x$ . Setzt man dann nämlich  $z_1 := [bx]$  und induktiv

$$z_n = \left[ b^n \left( x - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z_k}{b^k} \right) \right],$$

so erhält man

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{z_k}{b^k} \leq x < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z_k}{b^k} + \frac{1}{b^{n-1}}$$

und damit induktiv  $0 \leq z_n < b$  und  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{b^k}$ . Will man die  $b$ -adische Darstellung eindeutig machen, so muss man wie üblich verbieten, dass die Folge  $(z_k)$  ab einer gewissen Stelle konstant gleich  $b - 1$  ist.

## 4.2 Absolute Konvergenz und Konvergenzkriterien

Eine wichtige Klasse konvergenter Reihen sind die absolut konvergenten Reihen.

**Definition 4.8.** Die Reihe  $\sum a_k$  heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe  $\sum |a_k|$  ihrer Absolutbeträge konvergent ist.

**Beispiel 4.9** (Geometrische Reihen). Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

mit  $|q| < 1$  ist absolut konvergent, da die Reihe ihrer Absolutbeträge die (konvergente) geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |q|^k$$

ist.

**Beispiel 4.10** (Alternierende harmonische Reihe). Die *alternierende harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Diese Reihe ist nicht absolut konvergent, da die Reihe ihrer Absolutbeträge die (divergente) harmonische Reihe ist. Wir werden bald einsehen, dass die alternierende harmonische Reihe trotzdem konvergent ist.

Wir haben schon angekündigt:

**Satz 4.11.** *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*



*Beweis.* Dies folgt aus der zweifachen Anwendung des Cauchyriteriums zusammen mit der Dreiecksungleichung. Sei dazu  $\sum a_k$  absolut konvergent und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert wegen der Konvergenz der Reihe  $\sum |a_k|$  ein  $n_0$ , so dass für  $m > n \geq n_0$

$$\sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon$$

ist (Cauchyriterium). Die Dreiecksungleichung liefert

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon$$

für  $m > n \geq n_0$ , also ist  $\sum a_k$  konvergent (Cauchyriterium).  $\square$

Das liefert die folgenden nützlichen *Vergleichskriterien*:

- *Majorantenkriterium:* Ist  $\sum b_k$  absolut konvergent und  $|a_k| \leq |b_k|$  für (fast) alle  $k$ , so ist auch  $\sum a_k$  absolut konvergent.
- *Minorantenkriterium:* Ist  $0 \leq b_k \leq a_k$  für (fast) alle  $k$  und ist  $\sum b_k$  divergent, so ist auch  $\sum a_k$  divergent.

So ist z.B. jede Reihe  $\sum a_k$  konvergent, für die es ein  $q \in (0, 1)$  gibt mit  $|a_k| \leq q^k$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ . Hieraus ergeben sich zwei der wichtigsten Konvergenzkriterien für Reihen:

- *Wurzelkriterium:* Gibt es ein  $k_0$  und ein  $q \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq q < 1$ , so dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad \text{für } k \geq k_0$$

gilt, so ist  $\sum a_k$  absolut konvergent (und damit konvergent).

- *Quotientenkriterium:* Gibt es ein  $k_0$  und ein  $q \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq q < 1$ , so dass

$$a_k \neq 0 \quad \text{und} \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \quad \text{für } k \geq k_0$$

gilt, so ist  $\sum a_k$  absolut konvergent (und damit konvergent).

Die Bedingung beim Wurzelkriterium ist nämlich äquivalent zu  $|a_k| \leq q^k$  für  $k \geq k_0$ . Beim Quotientenkriterium nehmen wir o.B.d.A. an, dass die Bedingung für alle  $k$  gilt und erhalten induktiv

$$|a_k| \leq q|a_{k-1}| \leq q^2|a_{k-2}| \leq \dots \leq q^{k-1}|a_1|.$$

Es ist wichtig, dass in den Bedingungen tatsächlich  $q < 1$  ist. Eine Abschwächung der Bedingungen zu

$$\sqrt[k]{|a_k|} < 1 \quad \text{oder} \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  reicht nicht aus, wie das Beispiel der harmonischen Reihe  $\sum \frac{1}{k}$  zeigt.

Oft kann man die folgenden Limes-Versionen der Kriterien anwenden:

- *Wurzelkriterium:* Falls der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

existiert, so ist  $\sum a_k$  absolut konvergent (und damit konvergent).

- *Quotientenkriterium:* Falls der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

existiert, so ist  $\sum a_k$  absolut konvergent (und damit konvergent).

**Beispiel 4.12.** Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

denn es gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \frac{|z|}{k+1},$$

was mit  $k \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert und damit sicher die Bedingung im Quotientenkriterium erfüllt.

**Beispiel 4.13.** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$$

konvergiert nach dem Wurzelkriterium, da  $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$  für  $k \geq 2$  gilt.

**Beispiel 4.14.** Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  und jedes  $m \in \mathbb{N}$  konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m z^k,$$

denn es gilt

$$\lim \sqrt[k]{|a_k|} = \lim \sqrt[k]{k^m} |z| = |z| < 1,$$

womit die Bedingung im Wurzelkriterium erfüllt ist.

Absolute Konvergenz ist sehr wichtig, wenn man Reihenglieder umordnen möchte, also in gewissem Sinne Kommutativität und Assoziativität der Addition bei Reihen anwenden möchte. Damit muss man im Allgemeinen sehr vorsichtig sein, wie der folgende „Beweis“ der Gleichung  $0 = 1$  zeigt:

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1.$$

Offensichtlich ist das Gleichheitszeichen in der Mitte nicht gültig. Hat man hingegen eine absolut konvergente Reihe, so kann man die Reihenglieder beliebig umordnen und zusammenfassen und die entstehende Reihe ist wieder konvergent mit der gleichen Summe. Formal: Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent und  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Bijektion (also eine Permutation der natürlichen Zahlen), so ist auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$  konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Reihen mit dieser Eigenschaft für beliebige Permutationen  $\pi$  nennt man übrigens unbedingt konvergent. Mit dieser Terminologie gilt dann

- Eine Reihe ist unbedingt konvergent genau dann, wenn sie absolut konvergent ist.

Für einen Beweis dieses Satzes verweisen wir hier auf die Literatur. Übrigens kann man eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe mit reellen Gliedern so umordnen, dass jede beliebige vorgegebene reelle Zahl als Reihensumme herauskommt. Dieses Resultat ist als Riemannscher Umordnungssatz bekannt.

### 4.3 Alternierende Reihen und Leibniz-Kriterium

Reihen mit reellen Gliedern, deren Vorzeichen alternieren, heißen *alternierende Reihen*. Ein Beispiel ist die bereits erwähnte alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Für alternierende Reihen gilt das folgende wichtige Konvergenzkriterium:

**Satz 4.15** (Leibniz-Kriterium). *Ist  $(a_k)$  eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen (also insbesondere  $a_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ), so ist die alternierende Reihe  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \dots$  konvergent.*

*Beweis.* Aus der Monotonie der Folge  $(a_k)$  folgt, dass  $a_1 - a_2, a_3 - a_4, \dots$  nichtnegativ sind. Damit bilden die Partialsummen der alternierenden Reihe

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \dots$$

mit geradem Index  $n$  eine monoton wachsende Folge:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}.$$

Analog sieht man ein, dass die Partialsummen mit ungeradem Index eine monoton fallende Folge bilden. Außerdem ist  $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , also  $s_{2n+1} \geq s_{2n}$ . Wir erhalten dann

$$s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_{2n+1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1.$$

Als monotone und beschränkte Folgen konvergieren die beiden Folgen  $(s_{2n})$  und  $(s_{2n+1})$ , und zwar wegen  $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$  gegen den gleichen Grenzwert  $s$ . Damit konvergiert aber die gesamte Partialsummenfolge  $(s_n)$  gegen  $s$ , die alternierende Reihe ist konvergent.  $\square$

Insbesondere konvergiert also die alternierende harmonische Reihe, obwohl sie nicht absolut konvergent ist. Übrigens ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \ln 2,$$

was wir aber an dieser Stelle noch nicht zeigen können.

#### 4.4 Reihen mit beliebigen Indexmengen, Umordnungssatz und Cauchy-Produkt

Oftmals ist die Indexierung der Reihenglieder mit den natürlichen Zahlen nicht die am besten angepasste Variante. Aus diesem Grund betrachten wir jetzt Reihen, wo die Indizes in beliebigen (abzählbaren) Indexmengen laufen. Dazu sei  $M$  eine abzählbare Menge,  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$  eine Bijektion und für jedes  $\alpha \in M$  sei  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ . Ist dann die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

absolut konvergent, so sagen wir, dass die Reihe

$$\sum_{\alpha \in M} a_\alpha$$

absolut konvergent ist und setzen

$$\sum_{\alpha \in M} a_\alpha := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

Da man absolut konvergente Reihen beliebig umordnen kann, ohne die Reihensumme zu verändern, ist diese Definition unabhängig von der konkreten Wahl der Bijektion  $\varphi$ . Ist zum Beispiel  $G$  die Menge aller geraden natürlichen Zahlen, so ist

$$\sum_{n \in G} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots$$

Dann gilt

**Satz 4.16** (Großer Umordnungssatz). *Sei  $M$  eine abzählbare Menge und seien  $I_1, I_2, \dots$  paarweise disjunkte Teilmengen von  $M$ , deren Vereinigung ganz  $M$  ist - also eine Zerlegung von  $M$ . Ist  $\sum_{\alpha \in M} a_\alpha$  absolut konvergent, so sind auch alle  $\sum_{\alpha \in I_k} a_\alpha$  absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{\alpha \in M} a_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in I_k} a_\alpha.$$

*Beweis.* Da  $\sum_{\alpha \in M} a_\alpha$  absolut konvergent ist, ist wegen

$$\sum_{\alpha \in I} |a_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in M} |a_\alpha|$$

für jedes  $I \subseteq M$  auch  $\sum_{\alpha \in I} a_\alpha$  absolut konvergent.

Wir zeigen die Summenformel nur für Zerlegungen von  $M$  in zwei Mengen  $M = I \cup J$ . Für Zerlegungen in endlich viele Mengen folgt sie dann per Induktion, für Zerlegungen in abzählbar viele Mengen ist noch ein bißchen mehr Arbeit notwendig.

Seien dazu  $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow I$  und  $\varphi_2 : \mathbb{N} \rightarrow J$  zwei Bijektionen. Dann ist durch  $\varphi(2n-1) = \varphi_1(n)$  und  $\varphi(2n) = \varphi_2(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine Bijektion  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$  definiert. Dann erhalten wir mittels der absoluten Konvergenz von  $\sum_{\alpha \in M} a_\alpha$

$$\sum_{\alpha \in M} a_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi_1(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi_2(n)} = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha + \sum_{\alpha \in J} a_\alpha.$$

□

Das wohl wichtigste Beispiel sind Doppelreihen, für die  $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist, also Reihen der Form

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}.$$

Ist diese Reihe absolut konvergent, so erlaubt uns der Umordnungssatz verschiedene Berechnungsmethoden:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \left( \sum_{i+j=k} a_{i,j} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k-i} \right).$$

Stellt man sich die Glieder der Doppelreihe angeordnet als unendliche Matrix

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

vor, so werden mittels

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \right)$$

zunächst alle Zeilensummen in der Matrix berechnet und anschließend addiert. Die Summation

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} \right)$$

entspricht der Berechnung der Spaltensummen und anschließender Summation dieser. Die letzten zwei Berechnungsmethoden summieren erst über die Nebendiagonalen. Ist die Doppelreihe

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$$

absolut konvergent, erhält man ihre Summe durch jede dieser Methoden.

Zum Beispiel kann man damit für  $|z|, |w| < 1$  die doppelte geometrische Reihe

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} z^i w^j = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left( \sum_{j=0}^{\infty} w^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \frac{1}{1-w} = \frac{1}{(1-z)(1-w)}$$

erhalten. Man multipliziert also die beiden geometrischen Reihen einfach aus und erhält die doppelte geometrische Reihe:

- Sind  $\sum a_k$  und  $\sum b_k$  absolut konvergent, so ist

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$$

und die entstehende Doppelreihe ist absolut konvergent.

---

Für die spätere Anwendung auf Potenzreihen ist der folgende Spezialfall relevant, den man auch als *Cauchy-Produkt* bezeichnet:

- Sind  $\sum a_k$  und  $\sum b_k$  absolut konvergent, so ist

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right).$$

Anders geschrieben:

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

## 5 Stetige Funktionen

In diesem Kapitel geht es um einen weiteren wichtigen Begriff der Analysis - die Stetigkeit. Auch dieser beruht auf der Betrachtung von Grenzübergängen. Eine Funktion soll stetig sein, wenn kleine Änderungen im Argument nur kleine Änderungen im Funktionswert zur Folge haben. Eng verbunden mit dem Begriff der stetigen Funktion ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion. Diesen werden wir im Anschluss an das Studium der Grundlagen der Stetigkeit untersuchen. Weiter behandelt das Kapitel zwei wichtige Sätzen über stetige Funktionen - den Zwischenwertsatz und den Satz vom Maximum und Minimum. Wir schließen mit einer Übersicht über elementare Funktionen.

### 5.1 Reelle Funktionen, algebraische Operationen, Ordnung

Wiederholen Sie an dieser Stelle den allgemeinen Begriff der Funktion sowie die damit zusammenhängenden Begriffe Bild, Urbild, Graph, Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Umkehr- oder inverse Funktion, Komposition oder Hintereinanderausführung.

Wir wollen nun noch kurz auf reellwertige Funktionen auf einer allgemeinen Menge  $D$  eingehen, also Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Da man im Bildbereich algebraische Operationen hat, kann man diese *punktweise* auch für solche Funktionen definieren. Seien dazu  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei derartige Funktionen. Dann definieren wir die Summe  $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  für  $x \in D$ . Das Produkt  $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch  $(fg)(x) = f(x)g(x)$  für  $x \in D$ . Ist  $a \in \mathbb{R}$ , so definiert man die Funktion  $af : D \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls punktweise durch  $(af)(x) = af(x)$  für  $x \in D$ . Ist z.B.  $D = \mathbb{R}$  und  $f(x) = x$ , so ist  $g = f^2 = f \cdot f$  die Funktion  $g(x) = x^2$  und  $h = 42g + 5f + 1$  ist die Funktion  $h(x) = 42x^2 + 5x + 1$ . Ebenso definiert man punktweise die Funktionen  $f - g$ ,  $\frac{f}{g}$  (falls  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$  ist).

Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  kann man punktweise miteinander vergleichen. So schreibt man  $f \leq g$ , falls  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in D$  ist. Analog sind  $f < g$ ,  $f \geq g$  und  $f > g$  definiert.

Ist  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , so heißt  $f$  *monoton wachsend*, falls aus  $x_1, x_2 \in X$  und  $x_1 \leq x_2$  die Ungleichung  $f(x_1) \leq f(x_2)$  folgt. Gilt sogar  $f(x_1) < f(x_2)$  für  $x_1 < x_2$ , so heißt  $f$  *strikt monoton wachsend*. Definieren Sie selbst *monoton fallende* und *strikt monoton fallende* Funktionen. Machen Sie sich klar, dass eine monoton wachsende Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  gerade eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen ist.

### 5.2 Stetigkeit - Definition, Charakterisierung, grundlegende Sätze

Die „Schuldefinition“ für Stetigkeit, die man manchmal lernt, ist: eine Funktion heißt stetig, wenn man sie ohne Absetzen durchzeichnen kann. Anschaulich soll diese Definition besagen, dass eine stetige Funktion „keine Sprünge macht“. Diese „Definition“ hat einige Nachteile.

- Was soll das eigentlich genau heißen?
- Sinn macht das nur für Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf Intervallen  $[a, b]$ . Was ist mit Funktionen mit anderem Definitionsbereich? Was mit komplexen Funktionen?
- Sind die Funktionen in den folgenden Beispielen nun stetig oder nicht?

–  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

–  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

–  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Für die intuitive Vorstellung, was Stetigkeit bedeutet, ist die Schuldefinition natürlich trotzdem gut geeignet.

Um zu einer mathematisch sauberen und brauchbaren Definition zu kommen, orientieren wir uns an der Grenzwertdefinition für Folgen. Wir wollen sagen: falls die Argumente  $x$  und  $x_0$  dicht beieinander liegen (also mit einem  $\delta > 0$  die Ungleichung  $|x - x_0| < \delta$  gilt), sollen sich auch die Funktionswerte nur wenig unterscheiden (also soll  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  gelten). Wir brauchen also die Folgerung

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

und zwar für alle  $\varepsilon > 0$ , wobei wir das  $\delta$  passend zu  $\varepsilon$  wählen müssen. Diese Wahl von  $\delta$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon > 0$  entsprach bei der Definition der Folgenkonvergenz der Wahl des  $n_0$ . Damit gelangen wir zu folgender Definition, die sogenannte  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit.

**Definition 5.1.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Weiterhin sei  $x_0 \in D$ . Dann heißt  $f$  stetig im Punkt  $x_0$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x \in D$  die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Mit Quantoren:  $f$  ist stetig im Punkt  $x_0$ , wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die Stetigkeit nach dieser Definition ist also eine *lokale* Eigenschaft in einem Punkt  $x_0$  des Definitionsbereichs der Funktion. In *jedem* Punkt  $x_0 \in D$  können wir entscheiden, ob die Funktion stetig ist oder nicht. Zur Deutlichkeit schreiben wir die Eigenschaft von  $f$ , in einem Punkt  $x_0 \in D$  nicht stetig zu sein, auf:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \quad \text{und} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Um zu zeigen, dass eine Funktion in einem Punkt  $x_0$  *nicht stetig* ist, muss man also nur *ein*  $\varepsilon_0$  finden, so dass es in *jeder*  $\delta$ -Umgebung des Punktes  $x_0$  *einen* Punkt  $x$  gibt, so dass sich die Funktionswerte  $f(x)$  und  $f(x_0)$  um wenigstens  $\varepsilon_0$  unterscheiden.

Verlangt man nun, dass  $f$  in *jedem* Punkt des Definitionsbereichs stetig ist, gelangt man zur *globalen* Definition einer stetigen Funktion.

**Definition 5.2.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  stetig (oder *global stetig*), wenn  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in D$  stetig ist.

**Beispiel 5.3.** Konstante Funktionen sind stetig.

**Beispiel 5.4.** Die identische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig (auf ganz  $\mathbb{R}$ ), denn für diese Funktion gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$$



und man kann zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  das  $\delta > 0$  einfach als  $\delta = \varepsilon$  wählen:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Analog folgt mit der Dreiecksungleichung

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$$

die Stetigkeit der Betragsfunktion  $g(x) = |x|$  auf  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 5.5.** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2$  ist stetig (auf ganz  $\mathbb{R}$ ). Wir werden bald einen einfacheren Weg sehen, um dies zu zeigen. An dieser Stelle beweisen wir die Stetigkeit von  $f(x) = x^2$  direkt mit der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition. Sei also  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig. Um die Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $x_0$  zu zeigen, müssen wir zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  finden, so dass

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - x_0| < \delta$$

gilt. Dazu schätzen wir mit der Dreiecksungleichung folgendermaßen ab:

$$|x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0| |x + x_0| \leq |x - x_0| (|x - x_0| + 2|x_0|)$$

Ist nun

$$|x - x_0| < 1, \tag{1}$$

so können wir den zweiten Faktor durch

$$|x - x_0| + 2|x_0| \leq 1 + 2|x_0|$$

abschätzen. Ist außerdem

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}, \tag{2}$$

so erhalten wir insgesamt

$$|x^2 - x_0^2| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} (1 + 2|x_0|) = \varepsilon.$$

Wählen wir also

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} \right\} > 0,$$

so sind für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta$  beide Ungleichungen (1),(2) erfüllt und es folgt wie gewünscht

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

Im letzten Beispiel hängt das gewählte  $\delta$  nicht nur von  $\varepsilon$ , sondern auch vom Punkt  $x_0 \in D$  ab. Das ist in der Definition der Stetigkeit natürlich zulässig. Der Punkt  $x_0$  wird ja festgehalten. Die stetigen Funktionen, für die man das  $\delta$  *unabhängig von*  $x_0$  wählen kann, spielen aber ebenfalls eine wichtige Rolle. Dies führt uns zur nächsten Definition, bei der wir aus Symmetriegründen  $x, x_0$  durch  $x_1, x_2$  ersetzen.

**Definition 5.6.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  *gleichmäßig stetig*, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x_1, x_2 \in D$  die Implikation

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

gilt. Mit Quantoren:  $f$  ist gleichmäßig stetig, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Gleichmäßige Stetigkeit ist also eine Verschärfung der Stetigkeit, es gilt:

$$f \text{ gleichmäßig stetig} \implies f \text{ stetig.}$$

Die Funktionen aus den Beispielen 5.3 und 5.4 sind gleichmäßig stetig, die Funktion aus 5.5 nicht (tatsächlich?). Betrachtet man aber die Funktion aus Beispiel 5.5 eingeschränkt auf ein Intervall  $[a, b]$ , also  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$ , so zeigt der Beweis oben, dass man dann  $\delta$  unabhängig von  $x_0 \in [a, b]$  wählen kann, also  $f$  gleichmäßig stetig ist.

Die Funktionen aus den Beispielen 5.3 und 5.4 haben sogar noch eine stärkere Stetigkeitseigenschaft, die wir jetzt einführen - sie sind Lipschitz-stetig.

**Definition 5.7.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  *Lipschitz-stetig*, falls es eine Konstante  $L \geq 0$  gibt, so dass für alle  $x_1, x_2 \in D$  die Ungleichung

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

gilt.

Offenbar sind Lipschitz-stetige Funktionen gleichmäßig stetig, denn hier kann man  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$  wählen. Lipschitz-stetige Funktionen sind also gerade die stetigen Funktionen, für die man in der ursprünglichen Stetigkeitsdefinition  $\delta$  linear in  $\varepsilon$  wählen kann (und unabhängig von  $x_0$ ). Wir haben dann die Implikationen

$$f \text{ Lipschitz-stetig} \implies f \text{ gleichmäßig stetig} \implies f \text{ stetig.}$$

**Beispiel 5.8.** Lineare Funktionen sind Lipschitz-stetig. Eine lineare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion der Form  $f(x) = ax + b$  mit Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$ . Die Lipschitz-Stetigkeit folgt aus

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(ax_1 + b) - (ax_2 + b)| = |a| |x_1 - x_2|.$$

Hier kann man also  $L = |a|$  wählen.

**Beispiel 5.9.** Die Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = \operatorname{Re} x$ ,  $f(x) = \operatorname{Im} x$ ,  $f(x) = \bar{x}$  sind Lipschitz-stetig. Hier kann man  $L = 1$  wählen.

Wir kommen nun zum nützlichen Folgenkriterium für Stetigkeit, das in manchen Lehrbüchern auch als Ausgangsdefinition benutzt wird.

**Satz 5.10 (Folgenkriterium).** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ , sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sei  $x_0 \in D$ . Dann ist  $f$  im Punkt  $x_0$  stetig genau dann, wenn für jede Folge  $(x_n) \subseteq D$  aus der Konvergenz  $x_n \rightarrow x_0$  die Konvergenz  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  folgt.

Dieses Kriterium zeigt also, dass Stetigkeit eine Aussage über die Vertauschbarkeit von Folgen Grenzwerten und Funktionswerten ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

*Beweis.* Sei zunächst  $f$  stetig in  $x_0$  und sei  $(x_n) \subseteq D$  eine Folge mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Wir haben die Konvergenz  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  zu zeigen. Dazu wählen wir zunächst zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle  $x \in D$  gilt. Anschließend wählen wir mit Hilfe der Definition der Konvergenz  $x_n \rightarrow x_0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$n \geq n_0 \implies |x_n - x_0| < \delta.$$

Beide Implikationen zusammen liefern

$$n \geq n_0 \implies |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Konvergenz  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

Für die andere Richtung setzen wir voraus, dass  $f$  in  $x_0$  nicht stetig ist und konstruieren eine Folge  $(x_n) \subseteq D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ , aber  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ . Die Unstetigkeit von  $f$  in  $x_0$  liefert uns ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so dass für alle  $\delta > 0$  ein  $x \in D$  existiert mit den beiden Eigenschaften

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{und} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

existiert. Für  $n \in \mathbb{N}$  benutzen wir jetzt diese Aussage mit  $\delta = \frac{1}{n}$ , um ein  $x_n \in D$  mit den beiden Eigenschaften

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

zu finden. Wir erhalten also eine Folge  $(x_n) \subseteq D$ . Die Eigenschaft

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

liefert  $x_n \rightarrow x_0$ , die zweite Eigenschaft

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

liefert  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ .

Damit ist der Beweis vollständig. □

Aus dem Folgenkriterium für die Stetigkeit ergeben sich nun sofort folgende wichtige Rechengesetze für stetige Funktionen.

### Algebraische Operationen

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig im Punkt  $x_0 \in D$ . Dann sind auch die Funktionen

$$f + g, f - g, fg : D \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in  $x_0$ . Ist  $g(x) \neq 0$  für  $x \in D$ , so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in  $x_0$ . Wir beweisen nur die Stetigkeit von  $f + g$ , die anderen Funktionen behandelt man komplett analog.

*Beweis.* Sei  $(x_n) \subseteq D$  eine Folge mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  und  $g$  im Punkt  $x_0$  folgt mit dem Folgenkriterium  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  und  $g(x_n) \rightarrow g(x_0)$ . Damit gilt auch

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0).$$

Anwendung des Folgenkriteriums liefert die Stetigkeit von  $f + g$  in  $x_0$ . □

Insbesondere sind also Summen, Differenzen und Produkte stetiger Funktionen wieder stetig. Ebenso sind Quotienten stetiger Funktionen stetig, wenn man den Definitionsbereich einschränkt auf die Punkte  $x \in D$ , in denen der Nenner nicht verschwindet.

**Beispiel 5.11.** Polynome sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig. Ein Polynom ist eine Funktion  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Damit ergibt sich die Stetigkeit aus der Stetigkeit der konstanten Funktionen, der identischen Funktion  $f(x) = x$  und der Stetigkeit von Summen und Produkten stetiger Funktionen.

**Beispiel 5.12.** Rationale Funktionen sind stetig auf ihrem natürlichen Definitionsbereich. Eine rationale Funktion  $r$  ist ein Quotient  $r = \frac{p}{q}$  zweier Polynome  $p$  und  $q$ . Ihr natürlicher Definitionsbereich ist  $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ . Die Stetigkeit von  $r : D \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt sich aus der Stetigkeit von  $p, q$  und der Stetigkeit von  $p/q$  in allen Punkten, in denen der Nenner  $q$  nicht verschwindet.

### Kompositionen

Auch die Komposition stetiger Funktionen ist wieder stetig. Seien  $D, E \subseteq \mathbb{R}$  und seien  $f : D \rightarrow E$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist die Komposition  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Ist  $f$  stetig in  $x_0 \in D$  und ist  $g$  stetig in  $y_0 = f(x_0)$ , so ist  $g \circ f$  stetig in  $x_0$ . Insbesondere folgt also aus der Stetigkeit von  $f$  und  $g$  die Stetigkeit von  $g \circ f$ .

*Beweis.* Für den Beweis nutzen wir wieder das Folgenkriterium. Sei also  $(x_n) \subseteq D$  eine Folge mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $x_0$  folgt mit dem Folgenkriterium  $y_n := f(x_n) \rightarrow f(x_0) = y_0$ . Aus der Stetigkeit von  $g$  im Punkt  $y_0$  folgt nun mit dem Folgenkriterium

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \rightarrow g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Anwendung des Folgenkriteriums liefert die Stetigkeit von  $g \circ f$  in  $x_0$ . □

**Beispiel 5.13.** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist auch die Funktionen  $|f|$  stetig auf  $D$ . Diese ist nämlich Kompositionen von  $f$  mit den auf ganz  $\mathbb{R}$  stetigen Funktion  $g(x) = |x|$ .

**Beispiel 5.14.** Sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so sind auch die Funktionen  $\max\{f, g\}$  und  $\min\{f, g\}$  stetig. Dies folgt aus den Gleichungen

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{und} \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

und den obigen Beispielen und Rechengesetzen.

### Umkehrfunktionen

Sei  $f : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}$  eine stetige bijektive Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ . Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : D \rightarrow [a, b]$  stetig.

*Beweis.* Hier müssen wir das Folgenkriterium gemeinsam mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß verwenden. Sei also  $(y_n) \subseteq D$  eine Folge mit  $y_n \rightarrow y_0$ . Unser Ziel ist es, die Konvergenz  $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$  zu zeigen. Dazu setzen wir  $x_n = f^{-1}(y_n)$  und  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ . Es folgt  $f(x_n) = y_n$  und  $f(x_0) = y_0$ .

Die Folge  $(x_n)$  ist im Intervall  $[a, b]$  enthalten, besitzt also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ , sagen wir  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi \in [a, b]$ . Die Stetigkeit der Funktion  $f$  liefert nun mit dem Folgenkriterium die Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Aus der Voraussetzung  $y_n \rightarrow y_0$  folgt jetzt  $f(x_0) = y_0 = f(\xi)$ . Die Bijektivität von  $f$  liefert  $\xi = x_0$ .

Dieses Argument liefert auch, dass *jeder* Häufungspunkt der Folge  $(x_n)$  gleich  $x_0$  ist, die Folge hat also nur einen Häufungspunkt  $x_0$  und ist damit konvergent:

$$f^{-1}(y_n) = x_n \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0).$$

□

**Beispiel 5.15.** Da die Wurzelfunktion  $x \mapsto \sqrt[k]{x}$  die Umkehrfunktion der bijektiven stetigen Funktion  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $f(x) = x^k$  ist, folgt die Stetigkeit der Wurzelfunktionen.

Ebenfalls aus dem Folgenkriterium für die Stetigkeit und dem Satz von Bolzano-Weierstraß erhält man den folgenden Satz.

**Satz 5.16.** *Eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem abgeschlossenen Intervall ist gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Nehmen wir an, dass  $f$  stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist. Dann existieren  $\varepsilon_0 > 0$  und Folgen  $(x_n), (x'_n)$  in  $[a, b]$  mit

$$|x_n - x'_n| \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß liefert dann eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  von  $(x_n)$ , sagen wir  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ . Wegen

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \rightarrow 0$$

gilt auch  $x'_{n_k} \rightarrow x_0$ . Da  $f$  stetig ist, impliziert dads Folgenkriterium nun

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

im Widerspruch zu  $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ . Also ist  $f$  gleichmäßig stetig, wenn  $f$  stetig ist. □

### 5.3 Grenzwerte von Funktionen

Der Begriff des Grenzwerts einer Funktion hängt sehr eng mit dem Stetigkeitsbegriff zusammen. Allerdings braucht der Punkt  $x_0$ , in dem man den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  bestimmen will, nicht zum Definitionsbereich der Funktion  $f$  gehören. Er sollte aber an  $D$  angrenzen. Dies fassen wir mit folgender Definition.

**Definition 5.17.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann heißt  $x_0$  *Häufungspunkt* von  $D$ , falls es eine Folge  $(x_n) \subseteq D$  gibt mit  $x_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_n \rightarrow x_0$ .

**Beispiel 5.18.** Häufungspunkte der Menge  $D = (0, 1)$  sind alle Punkte  $x_0 \in [0, 1]$ .

**Beispiel 5.19.** Die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen hat keine Häufungspunkte.

**Beispiel 5.20.** Die Menge  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  hat genau einen Häufungspunkt  $x_0 = 0$ .

In manchen Büchern findet man die folgende äquivalente Definition:  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D \subseteq \mathbb{R}$  genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $x \in D$  gibt mit  $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ , wenn es also in jeder Umgebung von  $x_0$  einen *von  $x_0$  verschiedenen* Punkt aus  $D$  gibt.

**Definition 5.21.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Weiter sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $a$  der Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow x_0$ , wenn für alle Folgen  $(x_n) \subseteq D$  mit  $x_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_n \rightarrow x_0$

$$f(x_n) \rightarrow a$$

gilt. Dann schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Man beachte, dass im Fall  $x_0 \in D$  der Funktionswert  $f(x_0)$  für die Existenz des Grenzwerts keine Rolle spielt! Mit dem Folgenkriterium für Stetigkeit ergibt sich, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  genau dann gilt, wenn die Funktion  $g : D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ a & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

im Punkt  $x_0$  stetig ist. Insbesondere gilt für eine im Punkt  $x_0 \in D$  stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Beispiel 5.22.** Sei  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $x_0 = 1$  und

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Dann ist  $f$  im Punkt  $x_0 = 1$  nicht definiert, aber es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass die fortgesetzte Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

im Punkt  $x_0 = 1$  stetig ist. Dies ist offensichtlich, wenn man  $g(x) = x + 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  beobachtet.

Aus den Rechenregeln für stetige Funktionen ergeben sich sofort die folgenden Eigenschaften.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = a \pm b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = a b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ , falls  $b \neq 0$  ist.
- Ist  $f : D \rightarrow E \subseteq \mathbb{R}$  und existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in E$ , und ist  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $a \in E$ , so existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(a)$ .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$

**Beispiel 5.23.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x - 1}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)} = \sqrt[3]{2}.$$

Zum Abschluß dieses Abschnitts führen wir noch zwei Modifikationen von Grenzwerten von Funktionen ein. Zunächst kann man wie bei reellen Folgen *uneigentliche Grenzwerte* betrachten. Dazu sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Ist  $x_0$  Häufungspunkt von  $D$  und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$  für jede Folge  $(x_n) \subseteq D$  mit  $x_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_n \rightarrow x_0$ , so schreiben wir  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .
- Ist  $x_0$  Häufungspunkt von  $D$  und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$  für jede Folge  $(x_n) \subseteq D$  mit  $x_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_n \rightarrow x_0$ , so schreiben wir  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .
- Ist  $D$  nach oben unbeschränkt und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$  für jede Folge  $(x_n) \subseteq D$  mit  $x_n \rightarrow +\infty$ , so schreiben wir  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ . Hierbei kann  $a \in \mathbb{R}$  oder  $a = \pm\infty$  sein.
- Ist  $D$  nach unten unbeschränkt und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$  für jede Folge  $(x_n) \subseteq D$  mit  $x_n \rightarrow -\infty$ , so schreiben wir  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ . Hierbei kann  $a \in \mathbb{R}$  oder  $a = \pm\infty$  sein.

**Beispiel 5.24.** Sei  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

**Beispiel 5.25.** Sei  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom  $n$ -ten Grades gegeben durch

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit  $a_n \neq 0$ . Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ , falls  $a_n > 0$  ist, und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$ , falls  $a_n < 0$  ist (tatsächlich?). Überlegen Sie sich die verschiedenen Möglichkeiten für  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$  (das hängt auch davon ab, ob  $n$  gerade oder ungerade ist!).

Außerdem kann man bei reellem Definitionsbereich auch einseitige Grenzwerte betrachten. Dazu sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiter sei  $x_0$  ein Häufungspunkt der Menge  $D_+ = \{x \in D : x > x_0\}$ . Dann heißt  $a$  *rechtsseitiger Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow x_0$*  (oder *Grenzwert von oben/rechts*), wenn für alle Folgen  $(x_n) \subseteq D_+$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  die Konvergenz  $f(x_n) \rightarrow a$  gilt. Dann schreibt man

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow (x_0)_+} f(x) = a.$$

Ist  $x_0$  ein Häufungspunkt der Menge  $D_- = \{x \in D : x < x_0\}$ , so heißt  $a$  *linksseitiger Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow x_0$*  (oder *Grenzwert von unten/links*), wenn für alle Folgen  $(x_n) \subseteq D_-$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  die Konvergenz  $f(x_n) \rightarrow a$  gilt. Dann schreibt man

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow (x_0)_-} f(x) = a.$$

Ist  $x_0$  Häufungspunkt von  $D_+$  und von  $D_-$ , so existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  genau dann, wenn  $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$  und  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$  existieren und übereinstimmen. In diesem Fall ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x).$$

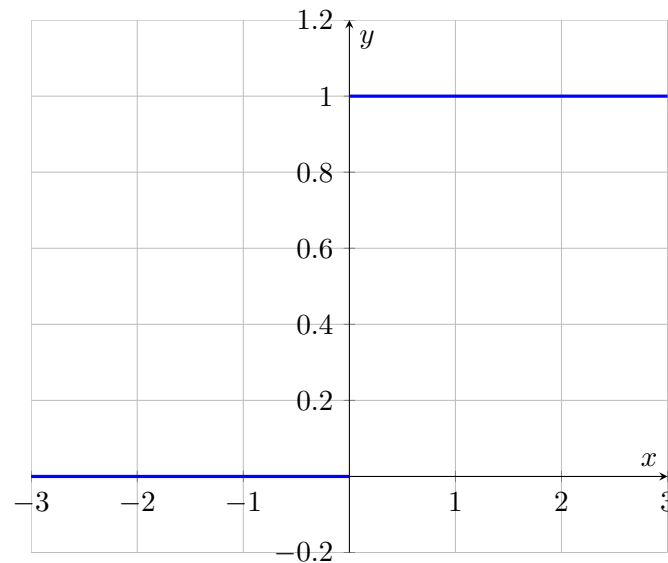
**Beispiel 5.26.** Die *Heavyside-Funktion* ist eine stückweise definierte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Sie ist zwar im Punkt  $x_0 = 0$  unstetig und macht dort einen Sprung, aber rechts- und linksseitige Grenzwerte existieren

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = 0.$$

Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht.



**Beispiel 5.27.** Wir betrachten die Funktion

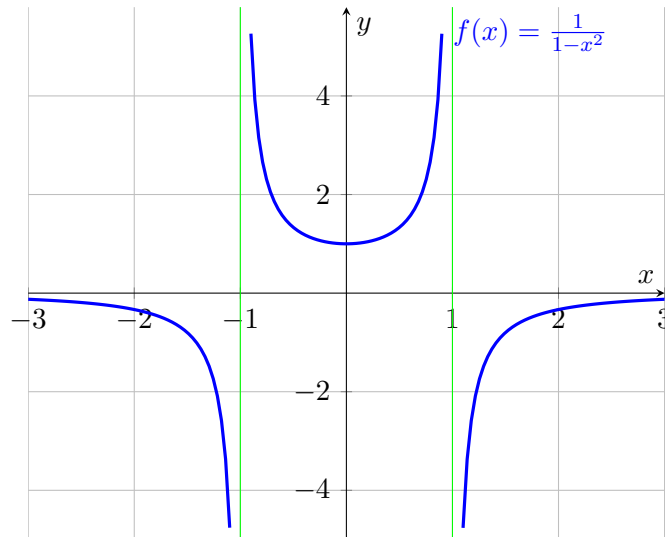
$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

auf ihrem natürlichen Definitionsbereich  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ . Dann gilt

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{1}{1-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0.$$

Die Funktion  $f$  hat bei  $x_0 = -1$  und bei  $x_0 = 1$  *Polstellen*.





**Beispiel 5.28.** Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & \text{für } x \neq \pm 2 \\ 0 & \text{für } x = \pm 2 \end{cases}$$

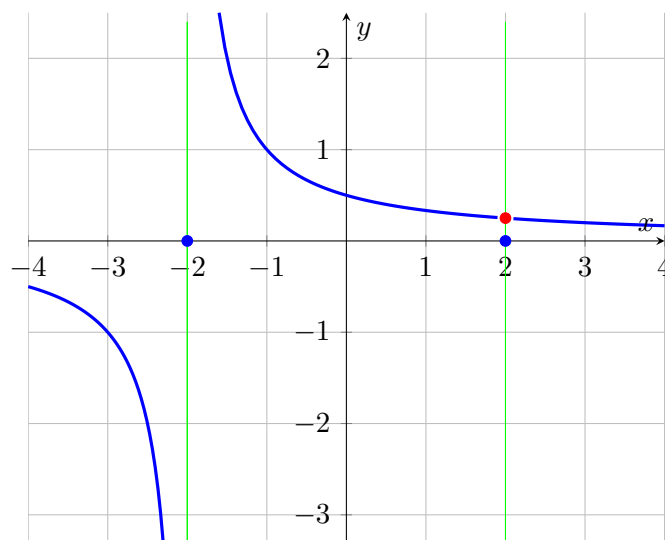
auf dem Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$ . Wegen

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

für  $x \neq \pm 2$  erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

Durch umdefinieren der Funktion an der Stelle  $x_0 = 2$  zu  $f(2) = \frac{1}{4}$  statt  $f(2) = 0$  können wir die Funktion dort stetig machen, die Funktion hat dort eine *hebbare Unstetigkeit*. Bei  $x_0 = -2$  liegt wieder eine Polstelle vor.

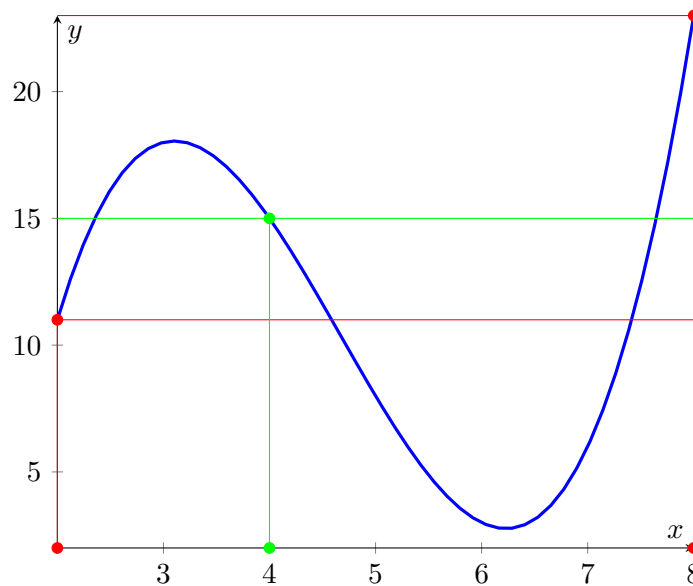


## 5.4 Zwischenwertsatz und Satz vom Maximum und Minimum

In diesem Abschnitt wollen wir zwei wichtige Sätze über stetige Funktionen kennenlernen, den Zwischenwertsatz und den Satz vom Maximum und Minimum.

Der Zwischenwertsatz ist die intuitiv einleuchtende Tatsache, dass eine stetige reelle Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall jeden Wert zwischen den Funktionswerten an den Intervallenden annimmt.

**Satz 5.29.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $y \in \mathbb{R}$  ein Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  (d.h.  $f(a) \leq y \leq f(b)$  oder  $f(b) \leq y \leq f(a)$ ). Dann gibt es ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .



*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall  $f(a) \leq f(b)$ . Der Fall  $f(b) \leq f(a)$  kann analog behandelt werden oder durch den Übergang von  $f$  zu  $-f$ .

Sei also  $f(a) \leq y \leq f(b)$ . Wir konstruieren eine Intervallschachtelung, die schließlich das gesuchte  $x$  im Durchschnitt liefert. Dazu setzen wir

$$a_1 = a \quad \text{und} \quad b_1 = b.$$

Ist nun

$$f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) \geq y, \text{ setzen wir } a_2 = a_1 \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Ist hingegen

$$f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) < y, \text{ setzen wir } a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \text{und} \quad b_2 = b_1.$$

In jedem Fall ist  $[a_2, b_2]$  eine Hälfte des Intervalls  $[a_1, b_1]$  und es gilt  $f(a_2) \leq y \leq f(b_2)$ .

Dieses Verfahren setzen wir induktiv fort. Sind  $a_n, b_n$  mit  $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$  bereits konstruiert und ist

$$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq y, \text{ setzen wir } a_{n+1} = a_n \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Ist hingegen

$$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < y, \text{ setzen wir } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{und} \quad b_{n+1} = b_n.$$

Wir erhalten zwei Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  mit

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 = b$$

und  $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ . Also sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  monotone und beschränkte Folgen und damit konvergent mit dem gleichen Grenzwert

$$x = \lim a_n = \lim b_n.$$

Die Stetigkeit von  $f$  und das Folgenkriterium liefern nun

$$f(x) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n).$$

Außerdem gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$  nach Konstruktion  $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ , was nun

$$\lim f(a_n) \leq y \leq \lim f(b_n)$$

impliziert. Es folgt

$$f(x) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n) = y.$$

□

Wir betrachten drei Anwendungen des Zwischenwertsatzes, um seine Bedeutung zu demonstrieren.

**Beispiel 5.30.** Der Zwischenwertsatz liefert sehr einfach die Existenz von Wurzeln, für die wir mit Hilfe der Vollständigkeit der reellen Zahlen früher ein komplizierteres Argument brauchten. Dazu sei  $a > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^n - a$ . Als Polynom ist  $f$  stetig. Außerdem ist  $f(0) = -a < 0$  und  $f(1+a) = (1+a)^n - a > 0$ . Der Zwischenwertsatz liefert ein  $x \in [0, 1+a]$  mit  $f(x) = 0$ , also  $x^n = a$  bzw.  $x = \sqrt[n]{a}$ .

**Beispiel 5.31.** Der Zwischenwertsatz liefert ebenfalls die Existenz von reellen Nullstellen von Polynomen mit ungeradem Grad. Sei dazu  $n \in \mathbb{N}$  ungerade und  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom  $n$ -ten Grades gegeben durch

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit  $a_n \neq 0$ . Wir nehmen o.B.d.A.  $a_n > 0$  an. Die Betrachtungen in Beispiel 5.25 haben  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$  gezeigt. Es gibt also  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $p(a) < 0, p(b) > 0$ . Der Zwischenwertsatz liefert ein  $x \in [a, b]$  mit  $p(x) = 0$ .

**Beispiel 5.32.** Die nächste Anwendung ist ein einfacher Fixpunktsatz. Sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig. Dann existiert ein  $x \in [0, 1]$  mit  $f(x) = x$ .

Zum Beweis betrachten wir die stetige Funktion  $g(x) = f(x) - x$ . Dann ist  $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$  und  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ . Der Zwischenwertsatz liefert ein  $x \in [0, 1]$  mit  $g(x) = 0$ , also  $f(x) = x$ .

Wir kommen nun zum Satz vom Maximum und Minimum.

**Satz 5.33.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es  $x_m$  und  $x_M$  in  $[a, b]$  mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist also beschränkt und nimmt ihr Maximum  $M = f(x_M)$  und ihr Minimum  $m = f(x_m)$  auf diesem Intervall an. Zusammen mit dem Zwischenwertsatz liefert dies, dass das Bild einer stetigen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall ist,  $f([a, b]) = [m, M]$ .

Die Abgeschlossenheit des Intervalls  $[a, b]$  in der Voraussetzung des Satzes ist wichtig. So ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  auf  $(0, 1]$  stetig, aber unbeschränkt.

*Beweis.* Die wichtigsten Zutaten des Beweises sind der Satz von Bolzano-Weierstraß und das Folgenkriterium für Stetigkeit.

Sei  $A = f([a, b])$  und sei  $S = \sup A$ . Beachten Sie, dass im Moment der Fall  $S = +\infty$  noch nicht ausgeschlossen ist. In jedem Fall gibt es eine Folge  $(y_n) \subseteq A$  mit  $y_n \rightarrow S$ . Wir wählen zu jedem  $y_n$  ein Urbild  $x_n \in [a, b]$  mit  $f(x_n) = y_n$ . Der Satz von Bolzano-Weierstraß liefert uns nun eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  von  $(x_n)$  mit Grenzwert  $x_M \in [a, b]$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_M.$$

Das Folgenkriterium für die Stetigkeit gibt dann

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_M).$$

Es folgt die Endlichkeit von  $S$  und dass das Supremum tatsächlich angenommen wird, also ein Maximum ist.

Die Existenz von  $x_m$  erhält man analog oder durch Übergang von  $f$  zu  $-f$ . □

## 5.5 Elementare Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz wichtige elementaren Funktionen einführen. Polynome und rationale Funktionen kennen wir bereits. Es folgen Exponentialfunktion, Potenzfunktion, Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen und deren Umkehrfunktionen sowie Hyperbelfunktionen und deren Umkehrfunktionen.

### 5.5.1 Exponentialfunktion

Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  fixiert. Für rationales  $x = \frac{m}{n}$  mit  $m \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir dann

$$a^x = a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Die Funktion  $x \mapsto a^x$  definiert auf  $\mathbb{Q}$  ist dann streng monoton wachsend für  $a > 1$  und streng monoton fallend für  $a < 1$ . Für  $a > 1$  ergibt sich das aus der Monotonie der Wurzelfunktion durch Ziehen der  $(n_1 n_2)$ -ten Wurzel aus

$$a^{m_1 n_2} < a^{m_2 n_1},$$

was für

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 n_2 < m_2 n_1$$

aus  $a > 1$  folgt. Den Beweis für  $0 < a < 1$  führt man analog.

Für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$  kann man nun  $a^x$  durch Grenzübergang gewinnen. Grundlage ist der folgende Satz.

**Satz 5.34.** Sei  $(x_n) \subset \mathbb{Q}$  monoton wachsend und konvergent mit  $\lim x_n = x$ . Dann konvergiert die Folge  $(a^{x_n})$ . Der Grenzwert hängt nur von  $x$  ab, nicht von der konkreten Auswahl der Folge  $(x_n)$ .

*Beweis.* Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a > 1$  an. Dann ist die Folge  $(a^{x_n})$  nach den vorhergehenden Bemerkungen monoton wachsend und außerdem nach oben beschränkt, z. B. durch  $a^y$  für ein  $y \in \mathbb{Q}$  mit  $y > x$ . Nach dem Monotoniekriterium konvergiert  $(a^{x_n})$ .

Um die Unabhängigkeit des Grenzwerts von der Auswahl der Folge  $(x_n)$  einzusehen, sei  $(x'_n)$  eine beliebige Folge rationaler Zahlen mit  $x'_n \rightarrow x$ . Dann ist für fixiertes  $k \in \mathbb{N}$

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{k}$$

für genügend großes  $n$ . Wegen  $\sqrt[k]{a} \rightarrow 1$  folgt  $a^{x'_n - x_n} \rightarrow 1$  und damit

$$a^{x_n} - a^{x'_n} = a^{x_n} (1 - a^{x'_n - x_n}) \rightarrow 0.$$

Also existiert auch

$$\lim a^{x'_n} = \lim a^{x_n}.$$

□

Im Beweis haben wir sogar gezeigt, dass für *jede* (auch nicht monotone) Folgen  $(x'_n)$  rationaler Zahlen der Grenzwert existiert und nur von  $x$  abhängt. Wir können also definieren:

**Definition 5.35.** Sei  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Dann setzen wir

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n},$$

wobei  $(x_n)$  eine beliebige Folge rationaler Zahlen mit  $x_n \rightarrow x$  ist.

Insbesondere ist hiermit die Exponentialfunktion

$$\exp(x) = e^x$$

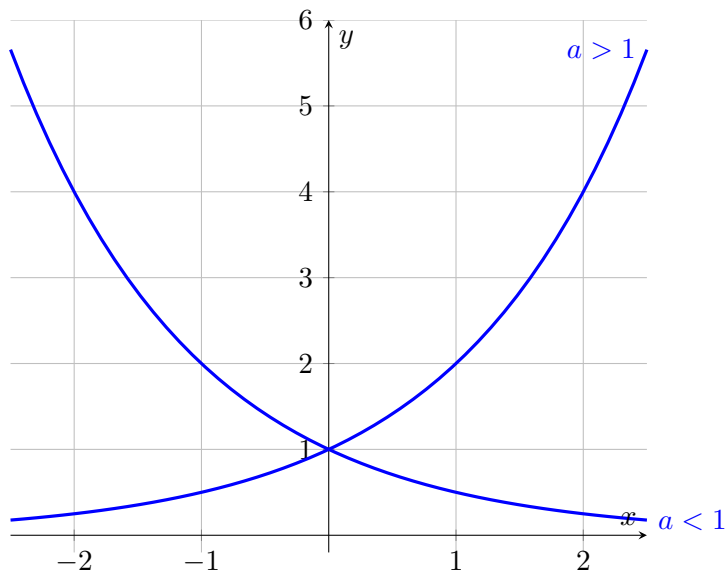
definiert. Wie für  $x = 1$  kann man zeigen, dass

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

gilt. Die letzte Darstellung heißt *Exponentialreihe* und kann zur Definition der Exponentialfunktion für komplexe  $x$  genutzt werden. Die Reihe ist nämlich für alle  $x \in \mathbb{C}$  absolut konvergent.

Wir fassen nun noch einige Eigenschaften der Exponentialfunktionen zusammen.

- $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$  ist stetig.
- $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$  ist für  $a > 1$  streng monoton wachsend und für  $0 < a < 1$  streng monoton fallend.
- Das Bild der Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  für  $a \neq 1$  ist  $\mathbb{R}_{>0}$ .
- Es gilt  $a^{x+y} = a^x a^y$ .



Die folgenden Abschätzungen für die Exponentialfunktion sind oft nützlich:

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{für } x \geq -1 \quad \text{und} \quad e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x < 1.$$

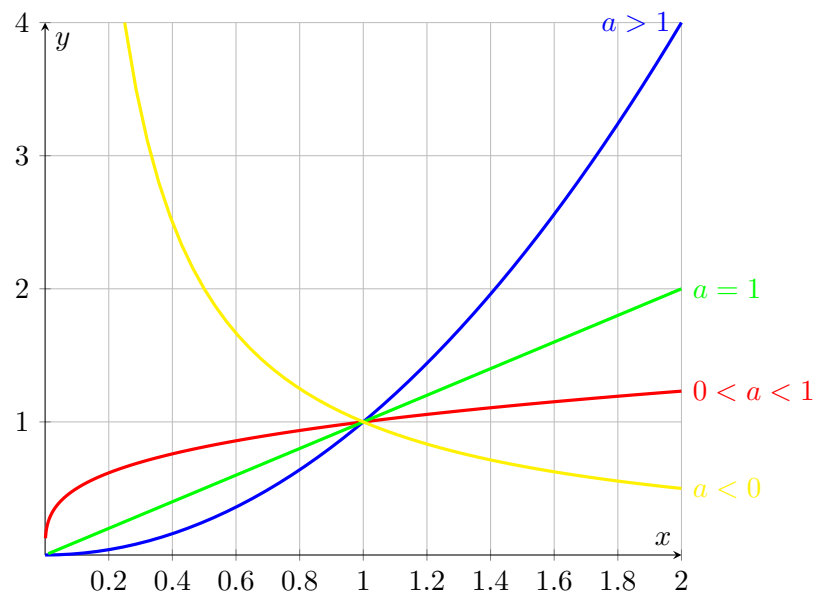
Hier folgt die Abschätzung nach unten aus der Bernoulli-Ungleichung  $(1 + \frac{x}{n})^n \geq 1 + x$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \geq -1$ , die Abschätzung nach oben aus der Bernoulli-Ungleichung  $(1 - \frac{x}{n})^n \geq 1 - x$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x < 1$  und der Ungleichung  $(1 + \frac{x}{n})^n \leq (1 - \frac{x}{n})^{-n}$ . Die Abschätzung nach unten gilt natürlich auch für  $x < -1$ , ist dort aber wegen  $e^x > 0$  trivial.

### 5.5.2 Potenzfunktion

Unter Verwendung der Exponentialfunktion aus dem vorhergehenden Abschnitt definiert man sofort die Potenzfunktion

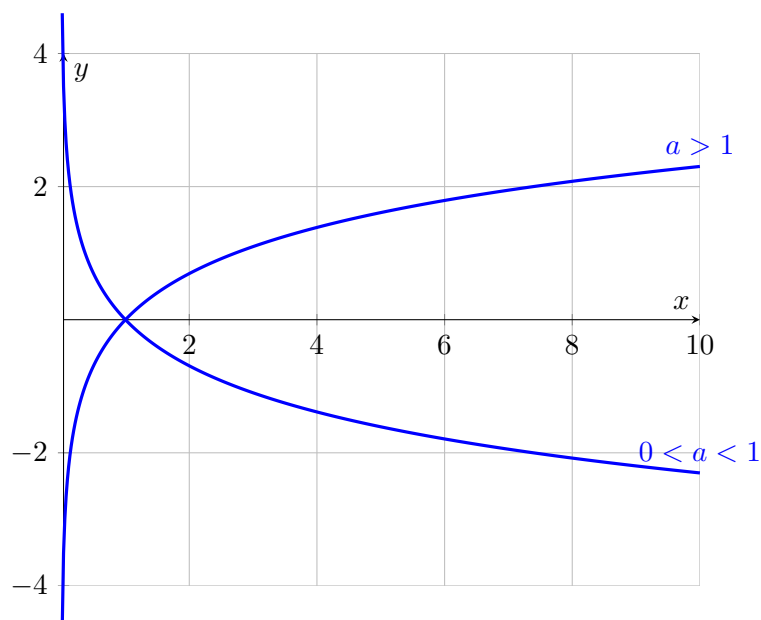
$$y = f(x) = x^a$$

für  $a \in \mathbb{R}$ . Im allgemeinen ist der Definitionsbereich von  $f$  dabei  $\mathbb{R}_{>0}$ , natürlich kann man wie üblich für  $a \in \mathbb{N}$  als Definitionsbereich ganz  $\mathbb{R}$  verwenden, und für ganzzahliges  $a$  mit  $a < 0$  kann man  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  benutzen. Die Potenzfunktion ist stetig.



### 5.5.3 Logarithmusfunktion

Für  $a > 0, a \neq 1$  ist die Exponentialfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$   $f(x) = a^x$  streng monoton, stetig und bijektiv. Also existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dies ist die *Logarithmusfunktion mit Basis  $a$* . Man bezeichnet sie mit  $f^{-1}(x) = \log_a x$ . Sie ist für den angegebenen Definitionsbereich und Wertebereich bijektiv und stetig, für  $a > 1$  streng monoton wachsend und für  $a < 1$  streng monoton fallend. Die Logarithmusfunktion zur Basis  $e$  wird *natürlicher Logarithmus* genannt und durch  $\log x := \ln x := \log_e x$  bezeichnet.



Es ist also

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

Damit ergeben sich aus den Rechengesetzen für die Exponentialfunktion die folgenden Regeln für die Logarithmusfunktion für jede Basis  $a$  und  $x, y > 0$ :

$$\begin{aligned}\log_a xy &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\ \log_a x^y &= y \log_a x.\end{aligned}$$

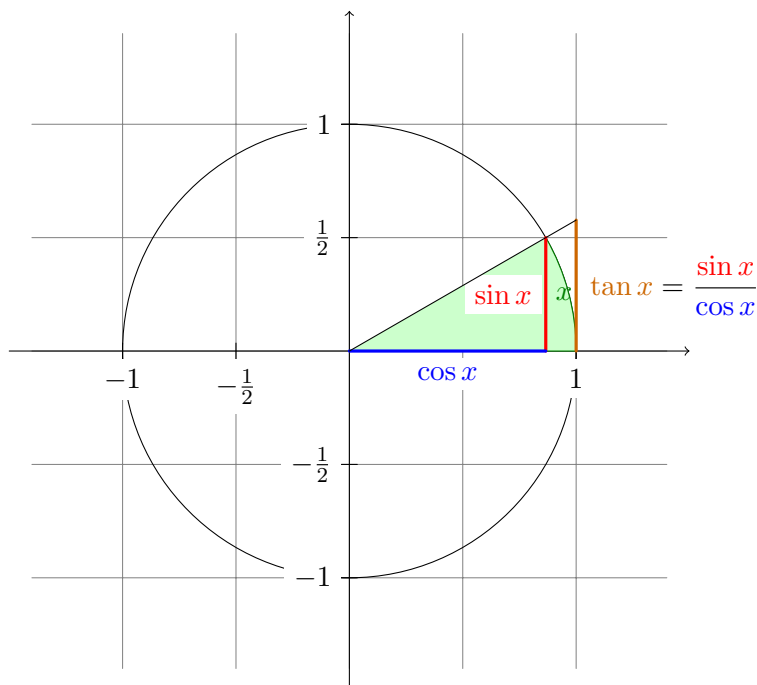
Außerdem kann man mit der Formel

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Logarithmen zu verschiedenen Basen ineinander umrechnen.

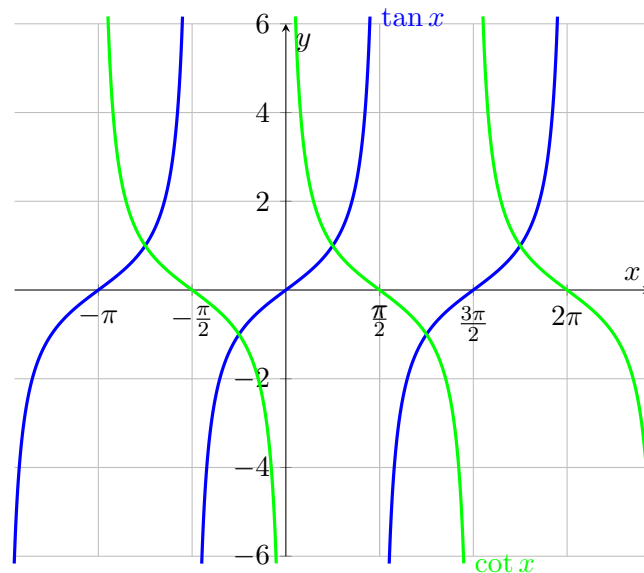
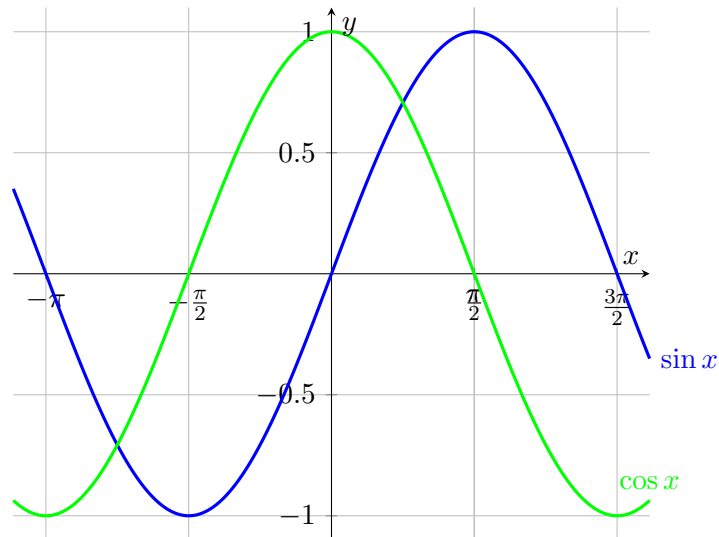
#### 5.5.4 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen wiederholen wir mit ihren Definitionen am Einheitskreis, die aus der Schule bekannt sind. Dazu brauchen wir die *Bogenlänge* eines Kreisbogens am Einheitskreis, die dem Winkels des entsprechenden Kreissektors im Bogenmaß entspricht. Da die Bogenlänge einer Kurve an dieser Stelle der Vorlesung mathematisch eigentlich noch nicht klar ist, ist dieser Zugang nicht ganz befriedigend. Man kann die trigonometrischen Funktionen auch alternativ und dann gleich für komplexe Argumente durch Potenzreihen einführen. Die Potenzreihen der trigonometrischen Funktionen behandeln wir hier aber erst später.



Man findet also  $\cos x$  (Kosinus) und  $\sin x$  (Sinus) als Koordinaten des Endpunktes des Kreisbogens mit der Bogenlänge  $x$ , der im Punkt  $(1, 0)$  beginnt und im mathematisch positiven Sinn verläuft. Ist  $\cos x \neq 0$ , also  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , dann definiert man noch  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Ist  $\sin x \neq 0$ , also  $x \neq k\pi$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , dann definiert man entsprechend und  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .





Es folgen einige Eigenschaften dieser Funktionen, viele weitere finden Sie in Nachschlagewerken.

- $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\cot$  sind auf ihren Definitionsbereichen stetig.
- $\cos$  und  $\sin$  sind periodisch mit Periode  $2\pi$ :  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ,  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\tan$  und  $\cot$  sind periodisch mit Periode  $\pi$ :  $\tan(x + \pi) = \tan x$ ,  $\cot(x + \pi) = \cot x$
- $\cos$  ist eine gerade Funktion:  $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin$  ist eine ungerade Funktion:  $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan$  und  $\cot$  sind ungerade Funktionen
- Es gelten die Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

- Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Wir überlegen uns nur die letzte Eigenschaft, die vorhergehenden setzen wir als bekannt voraus. Da  $\frac{\sin x}{x}$  eine gerade Funktion ist, genügt es

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

zu zeigen. Um diesen Grenzwert zu berechnen, beobachten wir, dass der Kreissektor mit Bogenlänge  $x$  für  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  das rechtwinklige Dreieck mit den Kathetenlängen  $\sin x$  und  $\cos x$  enthält und andererseits im rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  und 1 enthalten ist. Vergleich der Flächen des Kreissektors mit diesen Dreiecken liefert

$$\sin x \cos x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x},$$

also

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Da  $\cos$  stetig ist, ist  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ . Damit folgt aus dem Sandwichlemma

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

### 5.5.5 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Für die Definition der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, den *Arcus-Funktionen*, benötigen wir Intervalle, auf denen die trigonometrischen Funktionen streng monoton sind. Dazu benutzt man für

- $\cos$  das Intervall  $[0, \pi]$ , wo  $\cos$  streng monoton fallend ist
- $\sin$  das Intervall  $[-\pi/2, \pi/2]$ , wo  $\sin$  streng monoton wachsend ist
- $\tan$  das Intervall  $[-\pi/2, \pi/2]$ , wo  $\tan$  streng monoton wachsend ist

und erhält die inversen Funktionen

- $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , die stetig und monoton fallend ist
- $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ , die stetig und monoton wachsend ist
- $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ , die stetig und monoton wachsend ist.

Man hat also

$$\begin{aligned} y \arccos x &\iff x = \cos y \text{ und } y \in [0, \pi] \\ y \arcsin x &\iff x = \sin y \text{ und } y \in [-\pi/2, \pi/2] \\ y \arctan x &\iff x = \tan y \text{ und } y \in [-\pi/2, \pi/2] \end{aligned}$$

### 5.5.6 Hyperbelfunktionen

Schließlich betrachten wir noch die beiden *Hyperbelfunktionen* oder *hyperbolischen Funktionen*

- *hyperbolischer Sinus, sinus hyperbolicus*:  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- *hyperbolischer Kosinus, cosinus hyperbolicus*:  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Diese Funktionen haben die folgenden Eigenschaften:

- $\sinh, \cosh$  sind  $\mathbb{R}$  stetig.
- $\sinh$  ist ungerade,  $\cosh$  ist gerade.
- $\sinh$  ist streng monoton wachsend.
- $\cosh$  ist für  $x \geq 0$  streng monoton wachsend und für  $x \leq 0$  streng monoton fallend.

Damit kann man auch die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen definieren:

- *area sinus hyperbolicus*:  $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- *area cosinus hyperbolicus*:  $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

Direkt mittels Definitionen rechnet man folgende Formeln nach:

- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

## 6 Differentialrechnung

In diesem Kapitel studieren wir den Begriff der Ableitung einer Funktion von einer Variablen. Wir wenden diesen an, um Extremwerte von Funktionen zu bestimmen. Außerdem beschäftigen wir uns mit höheren Ableitungen und der Approximation von Funktionen durch Taylorpolynome, mit Bedingungen für Monotonie, Konvexität, Extremal- und Wendepunkten. Abschließend studieren wir die l'Hospitalsche Regel zur Berechnung von Grenzwerten.

### 6.1 Der Ableitungsbegriff

**Definition 6.1.** Sei  $I = (a, b)$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $f$  in einem Punkt  $x_0 \in I$  *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert die *Ableitung* von  $f$  in  $x_0$  und wird mit  $f'(x_0)$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$  bezeichnet. Ist  $f$  in jedem Punkt von  $I$  differenzierbar, so heißt  $f$  auch einfach *differenzierbar*.

Für festes  $h \neq 0$  ist der *Differenzenquotient*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

der Anstieg der Sekante durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  des Graphen von  $f$ . Die Ableitung  $f'(x_0)$ , auch *Differentialquotient* genannt, ist also der Grenzwert der Anstiege dieser Sekanten für  $h \rightarrow 0$ , geometrisch also der Anstieg der Tangente an den Graph von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ . Damit erhält man auch die Geradengleichung der Tangente in diesem Punkt als

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Physikalisch kann man die Ableitung auch als Momentangeschwindigkeit deuten. Dazu sei  $s(t)$  der Ort eines sich auf einer Geraden bewegenden Massepunktes zur Zeit  $t$ . Dann ist der Differenzenquotient

$$\frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

die Durchschnittsgeschwindigkeit des Punktes im Zeitintervall  $[t, t + h]$  und die Ableitung

$$v(t) = \dot{s}(t) = s'(t)$$

ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$ .

**Beispiel 6.2.** Sei  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Dies folgt nach Anwendung der binomischen Formel aus

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^{n-1}$$

und Grenzwertbildung  $h \rightarrow 0$ .

**Beispiel 6.3.** Sei  $f(x) = \sin x$ . Dann ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = \cos x$ . Dies folgt nach Anwendung des Additionstheorems

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

aus

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

und Grenzwertbildung  $h \rightarrow 0$ .

**Beispiel 6.4.** Sei  $f(x) = e^x$ . Dann ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = f(x) = e^x$ . Zum Beweis beobachten wir zunächst

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Es genügt also  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$  zu zeigen. Dies folgt sofort aus den Ungleichungen

$$\frac{1}{1-h} \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq 1 \quad \text{für } -1 < h < 1,$$

die wiederum direkt aus den schon bewiesenen Abschätzungen  $\frac{1}{1-h} \leq e^h \leq 1+h$  folgen.

Der folgende Satz zeigt, dass Differenzierbarkeit eine stärkere Forderung als Stetigkeit ist.

**Satz 6.5.** *Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so ist  $f$  in  $x_0$  stetig.*

*Beweis.* Wir führen den Beweis mit dem Folgenkriterium für die Stetigkeit. Sei also  $(x_n) \subset I$  eine Folge mit  $x_n \neq x_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_n \rightarrow x_0$ . Die Differenzierbarkeit in  $x_0$  liefert die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0).$$

Folglich existiert auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0) f'(x_0) = 0$$

und damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

□

Die Umkehrung in diesem Satz gilt nicht, wie die stetige Betragsfunktion  $f(x) = |x|$  zeigt, die im Punkt  $x = 0$  nicht differenzierbar ist.

## 6.2 Differentiationsregeln

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergeben sich wichtige Rechenregeln für Ableitungen. Dazu seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x \in I$  differenzierbare Funktionen. Dann gelten:

- $f + g$  ist in  $x$  differenzierbar und  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .
- Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  ist  $cf$  in  $x$  differenzierbar und  $(cf)'(x) = cf'(x)$ .

Diese beiden Eigenschaften nennt man *Linearität* der Ableitung. Auch  $fg$  ist in  $x$  differenzierbar und es gilt die *Produktregel*

- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .

Ist  $g \neq 0$  zumindest in einer Umgebung von  $x$ , so gilt die *Quotientenregel*

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ .

Die Linearität der Ableitung folgt direkt aus der Definition. Wir zeigen die Produktregel:

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x). \end{aligned}$$

Die Quotientenregel folgt aus der Produktregel, sobald die einfachere Variante  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$  benutzt werden kann. Diese werden wir unten als einfache Anwendung der Kettenregel zeigen.

**Beispiel 6.6.** Die Tangensfunktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Auch Umkehrfunktionen kann man bequem durch Zurückführung auf die Ausgangsfunktion differenzieren, wie der nächste Satz zeigt.

**Satz 6.7.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I = (a, b)$  streng monoton und stetig. Ist  $f$  im Punkt  $x \in I$  differenzierbar und ist  $f'(x) \neq 0$ , dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  im Punkt  $y = f(x)$  differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Sehr einprägsam ist diese Regel in der mathematisch nicht ganz exakten Formulierung

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

*Beweis.* Sei  $(y_n)$  eine Folge im Intervall  $f(I)$  mit  $y_n \rightarrow y$ . Wir setzen  $x_n = f^{-1}(y_n)$ , also ist  $y_n = f(x_n)$ . Aus der im vorhergehenden Kapitel gezeigten Stetigkeit der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  folgt

$$x_n = f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Dann folgt weiter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

□

**Beispiel 6.8.** Wir betrachten die Exponentialfunktion  $y = f(x) = e^x$  mit der Ableitung  $y' = f'(x) = e^x$ . Dann ergibt sich die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion  $x = f^{-1}(y) = \ln y$  mit der Ableitung

$$\frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

**Beispiel 6.9.** Sei jetzt  $y = f(x) = \tan x$  mit  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . Dann ergibt sich die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion  $x = f^{-1}(y) = \arctan y$  mit der Ableitung

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Schließlich zeigt der folgende Satz, wie man Kompositionen von Funktionen mittels der sogenannten *Kettenregel* differenziert.

**Satz 6.10.** Seien  $f : I \rightarrow J$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Ist  $f$  im Punkt  $x \in I$  differenzierbar und  $g$  im Punkt  $y = f(x)$  differenzierbar, dann ist die Komposition  $g \circ f$  in  $x$  differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) f'(x).$$

*Beweis.* Wir zeigen Differenzierbarkeit im Punkt  $x_0$  und setzen  $y_0 = f(x_0)$ . Dazu betrachten wir die Hilfsfunktion

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{für } y = y_0 \end{cases}$$

Nach Definition ist  $h$  stetig in  $y_0$  und es gilt  $g(y) - g(y_0) = h(y)(y - y_0)$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= h(y_0) f'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0). \end{aligned}$$

□

**Beispiel 6.11.** Wir wollen die allgemeine Potenzfunktion  $y = x^a$  differenzieren und benutzen

$$y = e^{a \ln x} = \exp(a \ln x).$$

Damit ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \exp'(a \ln x) \frac{a}{x} = \exp(a \ln x) \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1}$$

für beliebiges reelles  $a$ .

**Beispiel 6.12.** Wir tragen den Beweis der Kehrwertregel  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$  nach, die wir beim Beweis der Quotientenregel benutzt haben. Die Funktion  $1/g$  ist Verkettung der Funktionen  $g(x)$  und der Potenzfunktion  $h(y) = 1/y = y^{-1}$ . Aus der Kettenregel und  $h'(y) = -\frac{1}{y^2}$  ergibt sich dann sofort die Kehrwertregel.

**Beispiel 6.13.** Die logarithmische Ableitung ist ein bequemes Mittel, um sehr multiplikativ aufgebaute Funktionen zu differenzieren. Diese ergibt sich mittels Anwendung der Kettenregel auf die Funktion  $g = \ln f$ . Aus  $g' = \frac{f'}{f}$  erhält man

$$f' = f(\ln f)'$$

Ist zum Beispiel  $f(x) = x^x$ , so ist  $\ln f(x) = x \ln x$  mittels Produktregel einfach zu differenzieren und man erhält

$$f'(x) = f(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

### 6.3 Lokale Extrema und Mittelwertsatz

In diesem Abschnitt wollen eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer lokalen Extremalstelle einer Funktion kennenlernen und daraus die Mittelwertsätze ableiten.

**Definition 6.14.** Sei  $I = (a, b)$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Ein Punkt  $x_0 \in I$  heißt *lokale Minimalstelle* von  $f$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{für } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.$$

Ein Punkt  $x_0 \in I$  heißt *lokale Maximalstelle* von  $f$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.$$

Der entsprechende Funktionswert  $f(x_0)$  heißt *lokales Minimum* bzw. *lokales Maximum*. Eine *lokale Extremalstelle* ist eine lokale Minimalstelle oder Maximalstelle, ein *lokales Extremum* ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

Die folgende Bedingung für das Vorliegen einer lokalen Extremalstelle besagt anschaulich, dass in einem solchen Punkt die Tangente an den Graph der Funktion horizontal verlaufen muss.

**Satz 6.15** (notwendiges Kriterium für lokales Extremum). *Ist  $x_0$  eine lokale Extremalstelle von  $f$  und ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, dann gilt  $f'(x_0) = 0$ .*

*Beweis.* Sei  $x_0$  eine lokale Minimalstelle und sei  $\varepsilon > 0$  so gewählt wie in der Definition. Dann gilt für den Differenzenquotienten und für  $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

woraus durch Grenzübergang  $x \searrow x_0$  sofort  $f'(x_0) \geq 0$  folgt. Für  $x_0 - \varepsilon < x < x_0$  folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

woraus durch Grenzübergang  $x \nearrow x_0$  sofort  $f'(x_0) \leq 0$  folgt. Zusammen ergibt sich die behauptete Bedingung  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$



Der folgende Satz ist ein erster Mittelwertsatz, aus dem wir dann allgemeinere Mittelwertsätze ableiten wollen. Er folgt direkt aus der gerade gezeigten notwendigen Bedingung für eine lokale Extremalstelle zusammen mit dem Satz vom Maximum und Minimum. Anschaulich besagt er, dass der Graph einer Funktion auf einem Intervall mit gleichen Randwerten eine horizontale Tangente besitzen muss.

**Satz 6.16** (Satz von Rolle). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar. Weiter sei  $f(a) = f(b)$ . Dann gibt es eine Stelle  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ .*

*Beweis.* Ist  $f$  konstant, dann ist nichts zu zeigen. Ist  $f$  nicht konstant, dann sind die nach dem Satz 5.33 existenten Extremalstellen von  $f$  verschieden voneinander und wegen  $f(a) = f(b)$  gibt es eine Extremalstelle  $\xi \in (a, b)$ . Dann liefert Satz 6.15 die Behauptung.  $\square$

Es folgt der klassische Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Er besagt anschaulich, dass der Graph einer Funktion auf einem Intervall eine Tangente besitzen muss, deren Anstieg gleich dem Anstieg der Sekante durch die Endpunkte ist.

**Satz 6.17** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gibt es eine Stelle  $\xi \in (a, b)$  mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Beweis.* Betrachte die Funktion

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

und wende auf diese den Satz von Rolle an.  $\square$

Der letzte Satz in diesem Abschnitt ist eine weitere Verallgemeinerung. Den Mittelwertsatz erhält man als Spezialfall mit  $g(x) = x$ .

**Satz 6.18** (verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Sei  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar und sei  $g' \neq 0$ . Dann gibt es eine Stelle  $\xi \in (a, b)$  mit*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

*Beweis.* Betrachte die Funktion

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

und wende auf diese den Satz von Rolle an.  $\square$

## 6.4 Höhere Ableitungen, Taylorsche Formel und Taylorreihen

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und ist die Ableitung  $f'$  in  $x_0 \in D$  differenzierbar, so heißt  $f$  in  $x_0$  zweimal differenzierbar. Die Ableitung von  $f'$  in  $x_0$  wird dann mit

$$f''(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$$

bezeichnet und heißt *zweite Ableitung* von  $f$  in  $x_0$ . Ist  $f'$  (in ganz  $D$ ) differenzierbar, so heißt  $f$  zweimal differenzierbar. Induktiv definiert man dann analog die  $n$ -te Ableitung

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$$

sowie  $n$ -fache Differenzierbarkeit von  $f$ .

Mittels der ersten Ableitung findet man die Tangente an den Graph der Funktion  $f$ , also eine gute lokale Approximation von  $f$  mittels einer linearen Funktion. Mit höheren Ableitungen wollen wir nun  $f$  durch Polynome noch besser lokal approximieren. Dies führt zu den *Taylorpolynomen*. Dazu schauen wir uns zunächst an, wie man ein Polynom mittels Ableitungen an einer Stelle  $x_0$  beschreiben kann.

**Satz 6.19.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $p$  ein Polynom vom Grad höchstens  $n$ . Weiter sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann gilt

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Mittels der binomischen Formel

$$x^k = (x - x_0 + x_0)^k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (x - x_0)^\ell x_0^{k-\ell}$$

kann man das Polynom  $p$  aus der Standarddarstellung

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

in die Darstellung

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n$$

bringen. Sukzessives Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} p(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n \\ p'(x) &= b_1 + 2b_2(x - x_0) + nb_n(x - x_0)^{n-1} \\ p''(x) &= 2b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - x_0) + n(n-1)b_n(x - x_0)^{n-2} \\ &\vdots \\ p^{(n)}(x) &= n! b_n. \end{aligned}$$

Einsetzen von  $x = x_0$  in diese Gleichungen liefert schließlich die behaupteten Gleichungen

$$p^{(k)}(x_0) = k! b_k.$$

□

Dieser Satz motiviert die folgende Definition.

**Definition 6.20.** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung von  $x_0 \in D$  mindestens  $n$ -mal differenzierbar, so heißt das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

das *Taylorpolynom*  $n$ -ten Grades (oder der Ordnung  $n$ ) der Funktion  $f$  an der (Entwicklungs-)Stelle  $x_0$ .

Um die Güte der Approximation von  $f$  durch das Taylorpolynom abzuschätzen benutzt man den folgenden Satz.

**Satz 6.21** (Taylorsche Formel, Restglied nach Lagrange). *Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung von  $x_0 \in D$  mindestens  $(n+1)$ -mal differenzierbar, dann gilt für alle  $x$  in dieser Umgebung*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

mit dem Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

wobei  $\xi$  eine (von  $x$  abhängige) Zahl zwischen  $x_0$  und  $x$  ist.

Für  $n = 0$  ist diese Aussage nichts anderes als der Mittelwertsatz.

*Beweis.* Wir betrachten o.B.d.A. den Fall  $x > x_0$  und setzen

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{m}{(n+1)!} (x-t)^{n+1},$$

wobei wir  $m$  so wählen, dass  $g(x_0) = 0$  ist. Offensichtlich ist auch  $g(x) = 0$ . Also erfüllt  $g$  die Voraussetzungen des Satzes von Rolle und wir finden ein  $\xi$  mit  $x_0 < \xi < x$  und  $g'(\xi) = 0$ . Differentiation von  $g$  ergibt

$$g'(t) = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} + \frac{m}{n!} (x-t)^n = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + m \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Es folgt

$$0 = g'(\xi) = - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n + m \frac{(x-\xi)^n}{n!}$$

und damit  $m = f^{(n+1)}(\xi)$ . Umstellen von  $0 = g(x_0) = f(x) - T_n(x) - \frac{m}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$  liefert die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 6.22.** Sei  $f(x) = e^x$  und  $x_0 = 0$ . Dann sind alle Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$  gleich 1 und wir erhalten

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Es folgt  $R_n(x) \rightarrow 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und somit die Konvergenz der *Exponentialreihe*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

**Beispiel 6.23.** Sei  $f(x) = \cos x$  und  $x_0 = 0$ . Dann sind die Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$  periodisch 1,0,-1,0 und wir erhalten

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots + R_n(x).$$

Wieder folgt  $R_n(x) \rightarrow 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und somit die Konvergenz der *Kosinusreihe*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

Haben wir wie in den beiden Beispielen die Situation, dass  $f$  beliebig oft differenzierbar ist und dass in einer Umgebung von  $x_0$  für jedes  $x$  die Konvergenz  $R_n(x) \rightarrow 0$  gilt, dann besitzt  $f$  in dieser Umgebung die Reihendarstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

Diese Reihe heißt dann *Taylorreihe* oder *Taylorentwicklung* von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Wichtige Taylorreihen, die für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren, sind

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren sogar (absolut) für alle komplexen Zahlen  $x \in \mathbb{C}$  und ermöglichen so die Definition dieser Funktionen für komplexe Argumente. Dann liest man aus den Taylorreihen die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ab.

## 6.5 Monotonie und Konvexität

In diesem Abschnitt wollen wir weitere Eigenschaften von Funktionen, nämlich Monotonie und Konvexität/Konkavität mittels Ableitungen charakterisieren. Dazu sei in diesem Abschnitt  $I = (a, b)$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

**Satz 6.24** (Charakterisierung der Monotonie). *Sei  $f$  differenzierbar. Dann ist  $f$  in  $I$  genau dann monoton wachsend (fallend), wenn  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) für alle  $x \in I$  gilt.*

*Beweis.* Wir zeigen die Äquivalenz im Fall einer monoton wachsenden Funktion.

Sei dazu zunächst  $f$  monoton wachsend und  $x_0 \in I$ . Dann gilt  $f(x) \leq f(x_0)$  für  $x < x_0$  und  $f(x) \geq f(x_0)$  für  $x \geq x_0$ . In jedem Fall ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und folglich auch  $f'(x_0) \geq 0$ .

Gilt umgekehrt  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$ , so liefert der Mittelwertsatz für  $x_1, x_2 \in I$  ein  $\xi \in I$  mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0,$$

woraus  $f(x_1) \leq f(x_2)$  für  $x_1 < x_2$  folgt. □

Eine konvexe Funktion ist eine Funktion, bei der die Sekanten des Graphen oberhalb des Graphen liegen. Eine konkave Funktion ist eine Funktion, bei der die Sekanten des Graphen unterhalb des Graphen liegen. Die formale Definition ist

**Definition 6.25.**  $f$  heißt im Intervall  $I$  *konvex*, falls für alle  $x_0, x_1 \in I$  und alle  $\lambda \in (0, 1)$  die Ungleichung

$$f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$$

gilt.  $f$  heißt im Intervall  $I$  *konkav*, falls für alle  $x_0, x_1 \in I$  und alle  $\lambda \in (0, 1)$  die Ungleichung

$$f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1) \geq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$$

gilt.

Also ist  $f$  konkav genau dann, wenn  $-f$  konvex ist.

**Satz 6.26** (Charakterisierung der Konvexität). *Sei  $f$  zweimal differenzierbar. Dann ist  $f$  in  $I$  genau dann konvex (konkav), wenn  $f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) \leq 0$ ) für alle  $x \in I$  gilt.*

*Beweis.* Wir zeigen die Äquivalenz im Fall einer konvexen Funktion.

Gilt  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in I = (a, b)$  und sind  $x_0, x_1$  derart, dass  $a < x_0 < x_1 < b$  ist, so definieren wir für  $\lambda \in (0, 1)$

$$x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1.$$

Dann ist  $x_0 < x < x_1$  und  $x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0)$ ,  $x_1 - x = (1 - \lambda)(x_1 - x_0)$ . Der Mittelwertsatz liefert  $\xi_0 \in (x_0, x)$  und  $\xi_1 \in (x, x_1)$  mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi_0) \quad \text{und} \quad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(\xi_1).$$

Der vorhergehende Satz impliziert, dass  $f'$  monoton wachsend ist, also ist  $f'(\xi_0) \leq f'(\xi_1)$  und es folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\lambda(x_1 - x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{(1 - \lambda)(x_1 - x_0)}.$$

Umstellen der Ungleichung zwischen den äußeren Termen führt dann zur Konvexitätsungleichung

$$f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1) = f(x) \leq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1).$$

Ist andererseits  $f$  konvex, so rechnet man mit den vorhergehenden Bezeichnungen die Ungleichung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

für jeden Wert  $x$  mit  $x_0 < x < x_1$  nach. Durch die Grenzübergänge  $x \rightarrow x_0$  und  $x \rightarrow x_1$  erhält man daraus

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_1),$$

also ist  $f'$  monoton wachsend und damit  $f''(x) \geq 0$  für  $x \in I$ .  $\square$

## 6.6 Extrema und Wendepunkte

In diesem Abschnitt wollen wir auch hinreichende Bedingungen für das Vorliegen einer lokalen Extremalstelle behandeln. Anschaulich passiert an lokalen Minimalstellen ein Übergang von Fallen zu Wachstum, die Ableitung sollte also ihr Vorzeichen von negativ zu positiv wechseln, die zweite Ableitung also positiv sein.

Wir sagen, dass eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal stetig differenzierbar ist, wenn sie  $n$ -mal differenzierbar ist und  $f^{(n)}$  stetig ist.

**Satz 6.27.** Sei  $I = (a, b)$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei zweimal stetig differenzierbar. Weiter sei  $x_0 \in I$  mit  $f'(x_0) = 0$ . Ist dann  $f''(x_0) > 0$ , so ist  $x_0$  eine lokale Minimalstelle von  $f$ , ist  $f''(x_0) < 0$ , so ist  $x_0$  eine lokale Maximalstelle von  $f$ .

*Beweis.* Wir benutzen die Taylorsche Formel für  $n = 2$  und erhalten

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

mit einem  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ . Ist  $f''(x_0) > 0$ , so folgt aus der Stetigkeit von  $f''$  auch  $f''(\xi) > 0$  für alle  $x$  (und damit  $\xi$ ) in einer Umgebung von  $x_0$ . Also ist  $f(x) \geq f(x_0)$  in dieser Umgebung,  $x_0$  ist eine lokale Minimalstelle.  $\square$

Im Fall  $f''(x_0) = 0$  kann keine Aussage getroffen werden, es kann eine Extremalstelle vorliegen oder auch nicht. Allerdings kann man ebenfalls mit der Taylorsche Formel und höheren Ableitungen die folgende Verallgemeinerung zeigen:

Ist  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $f$   $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0,$$

so ist  $x_0$  für ungerades  $n$  eine lokale Extremalstelle, deren Art wieder durch das Vorzeichen von  $f^{(n+1)}(x_0)$  bestimmt ist. Dagegen liegt für gerades  $n$  keine lokale Extremalstelle, sondern ein Wendepunkt vor.

**Definition 6.28.** Sei  $I = (a, b)$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $x_0 \in I$ . Dann heißt  $x_0$  ein *Wendepunkt* von  $f$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $f$  in  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$  konvex und in  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  konkav ist oder umgekehrt.  $f$  wechselt also in  $x_0$  das Krümmungsverhalten.

Ist  $f$  zweimal stetig differenzierbar, dann sind also die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- $x_0$  ist Wendepunkt von  $f$ .
- Für  $f'$  findet in  $x_0$  ein Wechsel fallend-wachsend oder umgekehrt statt.
- $f''(x)$  wechselt in  $x_0$  das Vorzeichen.

Insbesondere ist ein Wendepunkt von  $f$  immer eine lokale Extremalstelle von  $f'$ . Falls  $f$  dreimal stetig differenzierbar ist und  $f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$  ist, dann ist  $x_0$  ein Wendepunkt von  $f$ .

## 6.7 Die Regel von l'Hospital

Wir schließen dieses Kapitel mit der Behandlung der Regel von l'Hospital, mit der Grenzwerte berechnet werden können, die auf unbestimmte Ausdrücke der Form  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  führen.

**Satz 6.29** (l'Hospital'sche Regel). Seien  $f, g$  reelle Funktionen, die in einer Umgebung von  $x_0$  (außer evtl. in  $x_0$ ) definiert sind, dort zumindest differenzierbar sind und in der  $g' \neq 0$  ist. Weiter gelte  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  oder  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  und setzen  $f, g$  in  $x_0$  durch  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  stetig fort. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz liefert dann zu jedem  $x$  in der Umgebung von  $x_0$  ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$  mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Betrachtet man nun den Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$ , so ist auch  $\xi \rightarrow x_0$  und die Existenz des Grenzwerts  $\lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  liefert die Behauptung.  $\square$

Die l'Hospital'sche Regel gilt sinngemäß für einseitige Grenzwerte. Durch Umformungen kann man auch unbestimmte Ausdrücke wie  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$  behandeln.

**Beispiel 6.30.** 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

**Beispiel 6.31.** 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

**Beispiel 6.32.** 
$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} x \ln x\right) = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x^{-1}}\right) = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}}\right) = e^0 = 1$$

## 7 Integralrechnung

In diesem Kapitel studieren wir zunächst die unbestimmte Integration als Umkehroperation des Differenzierens. Im Gegensatz zum Differenzieren, das mittels der Differentiationsregeln einen Algorithmus zum Berechnen der Ableitung einer explizit gegebenen Funktion liefert, ist das Integrieren, das Auffinden einer Stammfunktion, nicht generell möglich und benötigt oft gewisse Kunstgriffe. Wir werden einige Integrationsmethoden kennenlernen.

Anschließend behandeln wir das bestimmte oder Riemannsche Integral, das anschaulich durch die Berechnung der Fläche unter einer Kurve motiviert wird.

Den Zusammenhang zwischen unbestimmter und bestimmter Integration stellt dann der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung her. Mit seiner Hilfe können dann die Integrationsmethoden für die Bestimmung einer Stammfunktion zur Berechnung bestimmter Integrale nutzbar gemacht werden.

### 7.1 Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

**Definition 7.1.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf einem Intervall  $I$  definierte Funktion. Eine differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$  heißt *Stammfunktion* von  $f$ .

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so offenbar auch  $F + c$  für jede Konstante  $c \in \mathbb{R}$ . Sind andererseits  $F_1, F_2$  zwei Stammfunktionen von  $f$ , so unterscheiden sich  $F_1$  und  $F_2$  nur um eine additive Konstante, also  $F_1 - F_2 = c$ . Tatsächlich ist dann nämlich  $g = F_1 - F_2$  differenzierbar auf  $I$  und  $g' = 0$ , womit aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für  $x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 \neq x_2$  die Existenz eines  $\xi \in I$  mit

$$\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = g'(\xi) = 0$$

und damit folgt, dass  $g$  eine Konstante ist.

Eine beliebige Stammfunktion von  $f$  bezeichnet man mit  $\int f = \int f(x) dx$  und nennt sie unbestimmtes Integral von  $f$ . Den Vorgang des Auffindens einer Stammfunktion nennt man unbestimmtes Integrieren. In Tafelwerken findet man mehr oder weniger umfangreiche Tabellen mit unbestimmten Integralen vieler Funktionen. Ein paar wichtige Integrale, die aus den bekannten Ableitungen elementarer Funktionen abgeleitet werden, folgen.



$$\begin{aligned}
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1}, \quad a \neq -1 \\
\int \frac{dx}{x} &= \ln |x| \\
\int \cos x dx &= \sin x \\
\int \sin x dx &= -\cos x \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x \\
\int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{arcosh} x \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \operatorname{arsinh} x \\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, a \neq 1
\end{aligned}$$

Mit diesen Grundintegralen und Integrationsregeln, die wir jetzt kennenlernen wollen, lassen sich viele weitere Integrale berechnen.

Die *Linearität des Integrals*

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

folgt direkt aus der Linearität der Ableitung.

**Beispiel 7.2.**

$$\int (\sqrt{x} + x)^2 dx = \int (x + 2x^{3/2} + x^2) dx = \int x dx + 2 \int x^{3/2} dx + \int x^2 dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{x^3}{3}$$

Die Regel für die *partielle Integration*

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

folgt direkt aus der Produktregel.

**Beispiel 7.3.** Wir wollen mit partieller Integration eine Stammfunktion von  $\ln x$  berechnen. Dazu setzen wir  $f(x) = \ln x$  und  $g'(x) = 1$ . Das liefert  $f'(x) = \frac{1}{x}$  und  $g(x) = x$ . Partielle Integration ergibt

$$\int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

**Beispiel 7.4.**

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \sin x - x \cos x$$

**Beispiel 7.5.** Wir wollen mit partieller Integration eine Rekursionsformel für Integrale der Form

$$S_n = \int x^n \sin x \, dx \quad \text{und} \quad C_n = \int x^n \cos x \, dx$$

herleiten. Dazu setzen wir  $f(x) = x^n$  und  $g'(x) = \sin x$  bzw.  $g'(x) = \cos x$  und erhalten

$$\begin{aligned} S_n &= \int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx = -x^n \cos x + nC_{n-1} \\ C_n &= \int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx = x^n \sin x - nS_{n-1} \end{aligned}$$

Auf diese Weise führt man die Berechnung der Integrale  $S_n$  und  $C_n$  rekursiv auf die Grundintegrale  $\int \sin x \, dx$  und  $\int \cos x \, dx$  zurück.

Ist  $x = g(t)$  eine stetig differenzierbare und bijektive Funktion, so liefert die Anwendung der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

für eine Stammfunktion  $F = \int f$  die *Substitutionsregel*

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt$$

wobei man  $t = g^{-1}(x)$  setzen muss.

**Beispiel 7.6.** So erhält man mittels der Substitution  $t = g(x) = ax + b$

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{F(ax + b)}{a}$$

mit einer Stammfunktion  $F = \int f(x) \, dx$ . Damit berechnet man zum Beispiel leicht

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 13} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{4} \arctan\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

**Beispiel 7.7.** Ebenfalls sehr nützlich ist die allgemeine Substitution  $t = f(x)$ , die z.B. für Integrale der Form

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)|$$

liefert. Damit berechnet man zum Beispiel leicht

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \ln(1+x^2).$$

Wir wollen jetzt beschreiben, wie man mittels der bisher gefundenen Grundintegrale und Integrationsregeln und dem Verfahren der Partialbruchzerlegung Integrale rationaler Funktionen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit Polynomen  $p, q$  berechnen kann. Zunächst spaltet man durch Polynomdivision den polynomialen Anteil von  $r(x)$  ab, so dass wir nur noch den Fall einer *echt gebrochenen* rationalen Funktion haben, bei der der Grad von  $p$  kleiner als der Grad von  $q$  ist.

Außerdem benötigen wir den *Fundamentalsatz der Algebra*, der uns eine eindeutige Darstellung

$$q(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r}$$

liefert, wobei  $x_1, \dots, x_r$  die verschiedenen *komplexen* Nullstellen und  $k_1, \dots, k_r$  die entsprechenden Vielfachheiten sind. Da wir voraussetzen, dass die Koeffizienten  $a_j, b_j$  alle reell sind, können wir nun die Tatsache benutzen, dass komplexe nicht reelle Nullstellen als Paare auftreten: Ist  $z$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $k$ , so ist auch  $\bar{z}$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $k$ . Wir können also die Faktoren

$$(x - z)^k (x - \bar{z})^k = ((x - a)^2 + b^2)^k$$

zusammenfassen zu einer  $k$ -ten Potenz eines quadratischen Polynoms. Hierbei ist  $a$  der Realteil und  $b$  der Imaginärteil von  $z$ . Insgesamt erhalten wir die Faktorzerlegung eines reellen Polynoms in der Form

$$q(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{\ell_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\ell_s}.$$

Dabei sind  $x_1, \dots, x_r$  die reellen Nullstellen und die Nullstellen der quadratischen Terme  $x^2 + p_1x + q_1, \dots, x^2 + p_sx + q_s$  sind die Paare konjugiert komplexer Nullstellen.

**Beispiel 7.8.** Das Polynom  $q(x) = x^4 + 1$  vierten Grades besitzt die vier komplexen Nullstellen

$$\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

Das liefert die komplexe Zerlegung in Linearfaktoren

$$q(x) = x^4 + 1 = \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right).$$

Fasst man hier konjugiert komplexe Nullstellen zusammen, so erhält man die reelle Zerlegung

$$\begin{aligned} q(x) = x^4 + 1 &= \left( \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \right) \left( \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \right) \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1) (x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

Mittels quadratischer Ergänzung kann man diese Zerlegung in diesem Fall auch einfacher so bestimmen:

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2}x) (x^2 + 1 - \sqrt{2}x).$$

Mit Hilfe der reellen Faktorisierung kann man nun die echt gebrochene rationale Funktion  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  eindeutig darstellen als

$$r(x) = \sum_{j=1}^r \left( \frac{a_{j1}}{x-x_j} + \dots + \frac{a_{j,k_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right) + \sum_{j=1}^s \left( \frac{b_{j1}x + c_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \dots + \frac{b_{j,\ell_j}x + c_{j,\ell_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{\ell_j}} \right) \quad (3)$$

Diese Darstellung heißt *Partialbruchzerlegung* von  $r$ , die einzelnen Summanden sind die *Partialbrüche*.

**Beispiel 7.9.** Für die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{x+1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

besitzt der Nenner die Zerlegung

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x^2+1)(x-1),$$

also lässt sich  $r(x)$  darstellen als

$$r(x) = \frac{x+1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

**Beispiel 7.10.** Die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)(x+1)^3(x^2+x+1)^2}$$

besitzt die Partialbruchdarstellung

$$r(x) = \frac{a_1}{x-1} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)^2} + \frac{b_3}{(x+1)^3} + \frac{c_1x+d_1}{x^2+x+1} + \frac{c_1x+d_1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Die Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung bestimmt man durch Multiplikation des Ansatzes (3) mit dem Nenner  $q(x)$ , was auf eine Gleichung zwischen einem bekannten Polynom auf der linken und einem Polynom mit den gesuchten Koeffizienten auf der rechten Seite führt. Dann wählt man eine von zwei Methoden:

- Koeffizientenvergleich
- Einsetzen  $n$  verschiedener Werte für  $x$

Beides führt zu einem linearen Gleichungssystem von  $n$  Gleichungen für  $n$  zu bestimmende Koeffizienten.

**Beispiel 7.11.** Für die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{x+1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

besitzt der Nenner die Zerlegung

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x^2+1)(x-1),$$

also lässt sich  $r(x)$  darstellen als

$$r(x) = \frac{x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Multiplikation mit  $x^3-x^2+x-1 = (x^2+1)(x-1)$  liefert

$$x+1 = a(x^2+1) + (bx+c)(x-1).$$

Durch Einsetzen von  $x=1$  erhält man  $2=2a$ , also  $a=1$ . Durch Einsetzen von  $x=0$  erhält man dann  $1=1-c$ , also  $c=0$ . Durch Einsetzen von  $x=-1$  erhält man dann  $0=2+2b$ , also  $b=-1$ . Insgesamt ergibt sich

$$\frac{x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Alternativ kann man ausmultiplizieren und erhält

$$x+1 = (a+b)x^2 + (c-b)x + (a-c)$$

und anschließend durch Koeffizientenvergleich die drei Gleichungen  $a+b=0$ ,  $c-b=1$ ,  $a-c=1$  und daraus die gleichen Werte für  $a, b, c$ .

Nach der Zerlegung in Partialbrüche muss man also nur noch Terme der Form

$$\frac{1}{(x-a)^k} \quad \text{und} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$$

mit  $q > \frac{p^2}{4}$  integrieren. Dies geschieht mit den Formeln

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x-a} &= \ln|x-a| \\ \int \frac{dx}{(x-a)^k} &= \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} \quad \text{für } k=2,3,\dots \\ \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx &= \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{C-Bp/2}{\sqrt{q-p^2/4}} \arctan \frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} \\ \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} dx &= -\frac{B}{2(k-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + (C-Bp/2) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} \\ \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} &= \frac{1}{(k-1)(4q-p^2)} \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{4k-6}{(k-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} \end{aligned}$$

Die letzte Formel wird als Rekursionsformel benutzt.

**Beispiel 7.12.** Wir wollen die rationale Funktion

$$\frac{2x^4+x-1}{x^3-x^2+x-1}$$

integrieren. Da der Zählergrad größer als der Nennergrad ist, müssen wir zunächst eine Polynomdivision und anschließend die Partialbruchzerlegung durchführen, was zu

$$\frac{2x^4+x-1}{x^3-x^2+x-1} = 2x+2 + \frac{x+1}{x^3-x^2+x-1} = 2x+2 + \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1}$$

führt. Integration der einzelnen Summanden liefert dann

$$\int \frac{2x^4+x-1}{x^3-x^2+x-1} dx = x^2 + 2x + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

## 7.2 Das Riemann-Integral

Das Riemann-Integral einer Funktion  $f$  über einem Intervall  $[a, b]$  berechnet die Fläche unter dem Graphen von  $f$  zwischen  $a$  und  $b$ . Wir möchten das Integral für eine möglichst große Klasse von Funktionen berechnen. Das erreichen wir, indem wir zunächst das Integral für Treppenfunktionen definieren und anschließend andere Funktionen von oben und unten durch Treppenfunktionen approximieren.

**Definition 7.13.** Eine *Zerlegung*  $\mathcal{Z}$  eines Intervalls  $[a, b]$  ist gegeben durch Unterteilungspunkte

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Die *Feinheit* dieser Zerlegung  $\mathcal{Z}$  ist die maximale Länge eines Teilintervalls:

$$|\mathcal{Z}| \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

Eine *Treppenfunktion* ist eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf den offenen Teilintervallen  $(x_{i-1}, x_i)$  einer Zerlegung konstant ist.

Zu zwei Treppenfunktionen  $f, g$  auf  $[a, b]$  kann man immer eine Zerlegung finden, so dass beide Funktionen  $f, g$  auf den Teilintervallen dieser Zerlegung konstant sind. Dies erreicht man, indem man alle Unterteilungspunkte der zu  $f$  und  $g$  gehörenden Zerlegungen als eine neue Zerlegung auffasst. Das ist eine gemeinsame Verfeinerung beider Zerlegungen.

Die Treppenfunktionen auf einem Intervall  $[a, b]$  bilden einen linearen Raum, sind also  $f, g$  Treppenfunktionen und  $c, d \in \mathbb{R}$ , so ist  $cf + dg$  ebenfalls eine Treppenfunktion.

**Definition 7.14.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion mit  $f(x) = c_i$  auf dem Zerlegungsintervall  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann ist das Integral von  $f$  über  $[a, b]$  gegeben durch

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}).$$

Das Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der konkreten Wahl der Zerlegung  $\mathcal{Z}$ . Daraus ergibt sich sofort die *Linearität* des Integrals für Treppenfunktionen. Sind  $f, g$  Treppenfunktionen auf  $[a, b]$  und  $c, d \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx.$$

Ebenfalls sofort aus der Definition folgt die *Monotonie* des Integrals für Treppenfunktionen

$$f(x) \leq g(x) \text{ für } x \in [a, b] \quad \implies \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Ist nun  $f$  eine beschränkte Funktion, so kann man Treppenfunktionen (sogar konstante Funktionen)  $g, h$  finden mit  $g \leq f \leq h$ . Das rechtfertigt die Existenz von Supremum und Infimum in der folgenden

**Definition 7.15.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann heißt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sup \int_a^b g(x) \, dx$$

Unterintegral von  $f$ , wobei das Supremum über alle Treppenfunktionen  $g$  mit  $g \leq f$  gebildet wird. Entsprechend heißt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \inf \int_a^b h(x) \, dx$$

Oberintegral von  $f$ , wobei das Infimum über alle Treppenfunktionen  $h$  mit  $f \leq h$  gebildet wird.

Sind  $g, h$  Treppenfunktionen mit  $g \leq f \leq h$ , so folgt aus der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen  $\int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b h(x) \, dx$ . Also ist immer

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx.$$

Allerdings können sich Ober- und Unterintegral unterscheiden. Ein Beispiel dafür ist die *Dirichletfunktion*  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die 1 ist für rationales  $x$  und 0 für irrationales  $x$ . Da in jedem Teilintervall einer Zerlegung von  $[0, 1]$  sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen, gilt für Treppenfunktionen  $g, h$  mit  $g \leq f \leq h$  auf jedem Teilintervall  $(x_{i-1}, x_i)$ , dass  $g(x) \leq 0$  und  $h(x) \geq 1$  ist. Es folgt  $\int_0^1 g(x) \, dx \leq 0$  und  $\int_0^1 h(x) \, dx \geq 1$ . Außerdem hat man für  $g = 0$  und  $h = 1$  auch  $g \leq f \leq h$  und  $\int_0^1 g(x) \, dx = 0$  und  $\int_0^1 h(x) \, dx = 1$ . Damit ist

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \sup \int_0^1 g(x) \, dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 f(x) \, dx = \inf \int_0^1 h(x) \, dx = 1.$$

**Definition 7.16** (Riemann-Integral). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx,$$

dann heißt  $f$  *Riemann-integrierbar* und der gemeinsame Wert

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

heißt *Riemann-Integral* von  $f$  über  $[a, b]$ .

Die Bestimmung des Riemann-Integrals nennt man auch *bestimmte Integration*, um sie von der Bestimmung der Stammfunktion, also der unbestimmten Integration, zu unterscheiden.

Unmittelbar aus den Definitionen der Integrierbarkeit und von Supremum und Infimum folgt die Charakterisierung in

**Satz 7.17.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $g \leq f \leq h$  und

$$\int_a^b h(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \leq \varepsilon.$$

Mittels dieser Charakterisierung kann man für zwei große Klassen beschränkter Funktionen Integrierbarkeit zeigen.

**Satz 7.18.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig oder monoton. Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar.

*Beweis.* Sei zunächst  $f$  monoton wachsend. Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung in Intervalle der Länge  $\frac{b-a}{n}$ , also  $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ . Dann erfüllen die Treppenfunktionen  $g, h$  definiert durch

$$g(x) = f(x_{i-1}) \quad \text{und} \quad h(x) = f(x_i) \quad \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i)$$

offenbar  $g \leq f \leq h$ . Außerdem ist

$$\int_a^b h(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} = \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{n}.$$

Da wir  $n$  beliebig groß machen können, liefert Satz 7.17, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist.

Für stetiges  $f$  benötigen wir die in Satz 5.16 gezeigte Tatsache, dass jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall sogar gleichmäßig stetig ist, d.h. dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Wir wählen nun wieder eine äquidistante Zerlegung wie oben und definieren die Treppenfunktionen

$$g(x) = \min_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) \quad \text{und} \quad h(x) = \max_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) \quad \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i).$$

Nach dem Satz von Maximum und Minimum existieren diese max und min. Dann ist wieder  $g \leq f \leq h$  klar. Ist  $n$  genügend groß, so ist außerdem die Länge der Teilintervalle  $\frac{b-a}{n} < \delta$  und damit  $h(x) - g(x) < \varepsilon$  für alle  $x \in [a, b]$ . Es folgt sofort

$$\int_a^b h(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b (h(x) - g(x)) \, dx \leq \varepsilon(b-a)$$

und damit wieder mittels Satz 7.17 die Behauptung, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist.  $\square$

Die grundlegenden Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen übertragen sich auf das Riemann-Integral. Die Riemann-integrierbaren Funktionen auf  $[a, b]$  bilden also einen linearen Raum, sind  $f, g$  Riemann-integrierbar und  $c, d \in \mathbb{R}$ , dann ist auch  $cf + dg$  Riemann-integrierbar. Wir haben wieder die *Linearität* des Integrals

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x)) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx + d \int_a^b g(x) \, dx.$$

Ebenfalls gilt die *Monotonie* des Riemann-Integrals:

$$f(x) \leq g(x) \text{ für } x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$



Weiter kann man direkt die Riemann-Integrierbarkeit von  $f \cdot g$  und von  $|f|^p$  für  $0 < p < \infty$  folgern.

Wir kommentieren noch kurz den klassischen Zugang von Riemann zum Riemann-Integral über *Zwischensummen*. Wieder liegt eine Zerlegung  $\mathcal{Z}$  des Intervalls  $[a, b]$  zugrunde, also

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

In jedem Teilintervall sei zusätzlich ein Punkt  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  gewählt. Dann heißt die Summe

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

*Zwischensumme*. Man kann nun zeigen, dass eine beschränkte Funktion auf dem Intervall  $[a, b]$  genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn für jede Folge von Zerlegungen mit gegen 0 konvergierender Feinheit und für jede Wahl von Zwischenpunkten die Folge der zugehörigen Zwischensummen gegen eine Zahl  $I$  konvergiert. Dann ist außerdem  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

Will man direkt mit der Definition oder mittels Zwischensummen das Integral berechnen, ist das sehr umständlich.

**Beispiel 7.19.** Wir wollen mit der Definition das Integral

$$\int_0^a x^2 dx$$

berechnen, das wegen der Stetigkeit oder auch der Monotonie des Integranden existiert. Dazu betrachten wir eine äquidistante Zerlegung  $x_i = \frac{a}{n}i$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ . Da  $f(x) = x^2$  monoton wachsend ist, erhalten wir mit den Treppenfunktionen

$$g(x) = f(x_{i-1}) = \frac{(i-1)^2 a^2}{n^2} \quad \text{und} \quad h(x) = f(x_i) = \frac{i^2 a^2}{n^2} \quad \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

die Ungleichungen  $g \leq f \leq h$ . Nun ist nach Definition des Integrals für Treppenfunktionen

$$\int_0^a g(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2 a^2}{n^2} \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{a^3}{3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{2n^3}$$

und

$$\int_0^a h(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{i^2 a^2}{n^2} \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3}.$$

Hier haben wir die Formel für Summen von Quadraten benutzt. Für  $n \rightarrow \infty$  konvergieren beide Integrale gegen  $\frac{a^3}{3}$ , also ist

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

### 7.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir wollen nun bestimmte und unbestimmte Integration miteinander verknüpfen. Das leistet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, mit dem die Berechnung des Riemann-Integrals auf die Bestimmung einer Stammfunktion zurückgeführt wird.

Dazu benötigen wir den ebenfalls wichtigen

**Satz 7.20** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $g \geq 0$ . Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  derart, dass

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b g(x) \, dx$$

ist. Insbesondere ( $g = 1$ ) gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  derart, dass

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)$$

ist.

*Beweis.* Der Beweis beruht auf dem Zwischenwertsatz. Ist nämlich

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{und} \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x),$$

so folgt

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \quad \text{für } x \in [a, b]$$

und damit

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x)g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx.$$

Also ist

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \mu \int_a^b g(x) \, dx$$

mit einem  $\mu \in [m, M]$ . Nun liefert aber der Zwischenwertsatz ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \mu$  und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Für eine Riemann-integrierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  und  $a \in I$  betrachten wir nun das Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

mit variabler oberer Grenze  $x$ . Für  $x < a$  setzen wir dabei

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt = - \int_x^a f(t) \, dt.$$

Die Funktion  $F'(x)$  beschreibt also die Änderungsrate der Fläche unter dem Graphen von  $f$  an der Stelle  $x$ . Für stetige Funktionen ist anschaulich klar, dass diese Rate gerade  $f(x)$  ist. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

**Satz 7.21.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  stetig und sei  $a \in I$ . Dann ist die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

eine Stammfunktion von  $f$ .

*Beweis.* Der Beweis beruht auf dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Dazu betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Der Mittelwertsatz 7.20 liefert dann ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x+h$  mit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi).$$

Für  $h \rightarrow 0$  haben wir  $\xi \rightarrow x$ , womit die Stetigkeit von  $f$  die Behauptung

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$$

liefert. □

Nun ist es nur noch ein kleiner Schritt zum Beweis des

**Satz 7.22** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  stetig und ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann gilt für  $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

*Beweis.* Da sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, ist die Differenz  $F(b) - F(a)$  unabhängig von der konkreten Auswahl von  $F$ . Mit Satz 7.21 können wir also

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

wählen. Dann ist  $F(a) = 0$  und somit

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) = F(b) - F(a).$$

□

Nun ergeben sich aus den Differentiationsregeln für das unbestimmte Integral direkt entsprechende Rechenregeln und -methoden für das bestimmte Integral. Zunächst können wir nochmals die *Linearität des Riemann-Integrals*

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx$$

für Riemann-integrierbare Funktionen  $f, g$  ableiten.

Weiter erhält man die Regel für die *partielle Integration*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Die *Substitutionsregel* für bestimmte Integrale kann man folgendermaßen formulieren. Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  stetig und sei  $g : [a, b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar und streng monoton und damit bijektiv als Abbildung von  $[a, b]$  auf  $[g(a), g(b)]$  (bzw.  $[g(b), g(a)]$ ). Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

Zum Beweis beobachten wir, dass aus der Kettenregel folgt, dass für eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  die Komposition  $F(g(t))$  eine Stammfunktion von  $f(g(t))g'(t)$  ist. Mit Satz 7.21 erhalten wir also einerseits

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Andererseits folgt aus Satz 7.21 ebenfalls

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

**Beispiel 7.23.** Mit der Substitution  $x = g(t) = t^2$  ergibt sich  $dx = 2t dt$  und damit

$$\int_0^3 te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^9 e^{-x} dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \Big|_0^9 = \frac{1 - e^{-9}}{2}.$$

## 7.4 Uneigentliche Integrale

Das Riemann-Integral ist definiert für *beschränkte* Funktionen auf einem *endlichen* Integrationsintervall  $[a, b]$ . Wir wollen diese beiden Einschränkungen jetzt fallen lassen und auch unbeschränkte Integranden und unendliche Integrationsintervalle zulassen. Dies gelingt durch Betrachtung geeigneter Grenzwerte.

Betrachten wir zunächst unbeschränkte Integrationsintervalle. Dann definieren wir die *uneigentlichen Integrale*

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx \end{aligned}$$

für beschränktes  $f$ , falls die Integrale und Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. Man sagt dann, dass die Integrale auf der linken Seite *konvergieren*, existieren die Grenzwerte nicht, spricht man von *divergenten* Integralen. Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und existieren die Grenzwerte

$$F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \quad \text{und/oder} \quad F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x),$$

so kann man diese berechnen als

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) dx &= F(x) \Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a) \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty) \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= F(x) \Big|_{-\infty}^\infty = F(\infty) - F(-\infty). \end{aligned}$$

**Beispiel 7.24.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

**Beispiel 7.25.** Eine Stammfunktion der Funktion  $f(x) = x^{-\alpha}$  ist die Funktion  $F(x) = -\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$  für  $\alpha \neq 1$  und  $F(x) = \ln x$  für  $\alpha = 1$ . Damit ergibt sich

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = F(\infty) - F(1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für } \alpha > 1 \\ \infty & \text{für } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Aus dem letzten Beispiel und der Monotonie des Integrals ergibt sich das folgende nützliche Konvergenzkriterium für uneigentliche Integrale.

- Gibt es ein  $\alpha > 1$  und  $c > 0$ , so dass für  $x \geq a > 0$  die Ungleichung  $0 < f(x) < \frac{c}{x^\alpha}$  gilt, dann konvergiert das uneigentliche Integral  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .
- Gibt es ein  $\alpha \leq 1$  und  $c > 0$ , so dass für  $x \geq a > 0$  die Ungleichung  $f(x) > \frac{c}{x^\alpha}$  gilt, dann divergiert das uneigentliche Integral  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .

Für einen *unbeschränkten* Integranden  $f$  betrachten wir die Fälle, dass  $f$  eine Polstelle an einer der Intervallgrenzen oder im Inneren des Integrationsintervalls hat.

Hat  $f$  eine Polstelle in  $a$ , also ist  $\lim_{x \searrow a} = \pm\infty$ , so setzen wir

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^b f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Wieder nennt man in diesem Fall das *uneigentliche* Integral auf der linken Seite *konvergent*. Existiert der Grenzwert nicht spricht man von einem *divergenten* Integral.

Hat  $f$  eine Polstelle in  $b$ , also ist  $\lim_{x \nearrow b} = \pm\infty$ , so setzen wir entsprechend

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Wieder erhält man mit den entsprechenden Grenzwerten  $F(a) = \lim_{\alpha \searrow a} F(x)$ ,  $F(b) = \lim_{\beta \nearrow b} F(b)$  einer Stammfunktion  $F$  von  $f$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Hat  $f$  eine Polstelle in  $c$  im Inneren des Intervalls  $[a, b]$ , also ist  $\lim_{x \searrow c} = \pm\infty$  und  $\lim_{x \nearrow c} = \pm\infty$ , so setzen wir

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

falls die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren. Dies ist äquivalent zur Existenz von  $\lim_{x \rightarrow c} F(x)$  für eine geeignete Stammfunktion  $F$  von  $f$  und man hat dann wieder die Formel

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Beispiel 7.26.** Eine Stammfunktion der Funktion  $f(x) = \ln x$  auf  $(0, \infty)$  ist die Funktion  $F(x) = x(\ln x - 1)$ . Dann ist

$$\lim_{x \searrow 0} F(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x - 1}{1/x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$

und es ergibt sich

$$\int_0^1 \ln x \, dx = F(1) - F(0) = -1.$$

**Beispiel 7.27.** Was ist an der Rechnung

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$$

(positiver Integrand, negatives Integral) falsch? Man integriert über die Polstelle  $x = 0$  des Integranden hinweg, ohne die Nichtexistenz von  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$  zu beachten. Richtig ist die Rechnung

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \left( -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^0 \right) + \left( -\frac{1}{x} \Big|_0^1 \right) = (\infty - 1) + (-1 + \infty) = \infty.$$

**Beispiel 7.28.** In diesem Beispiel wollen wir die wichtige *Eulersche Gammafunktion*

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} \, dx$$

kennenlernen. Dieses Integral konvergiert für alle  $t > 0$ . Dies sieht man ein, indem man einerseits die Konvergenz von  $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{t-1} \, dx$  aus der Ungleichung

$$0 < e^{-x} x^{t-1} = \frac{x^{t-1}}{e^x} < \frac{x^{t-1}}{x^n/n!} = \frac{n!}{x^{1-t+n}}$$

für  $n > t$  schlussfolgern kann. Andererseits konvergiert auch  $\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} \, dx$  wegen  $0 < e^{-x} x^{t-1} \leq x^{t-1}$  und

$$\int_0^1 x^{t-1} \, dx = \frac{x^t}{t} \Big|_0^1 = \frac{1}{t}.$$

Für  $t = 1$  erhält man sofort

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Außerdem ergibt sich durch partielle Integration die Funktionalgleichung

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^t \, dx = -e^{-x} x^t \Big|_0^{\infty} + t \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} \, dx = t\Gamma(t).$$

Aus der Rekursionsformel erhält man induktiv

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

die Gammafunktion  $\Gamma(t+1)$  ist also eine Fortsetzung der Fakultätsfunktion von den natürlichen Zahlen auf die nichtnegativen reellen Zahlen unter Erhaltung der Rekursionsformel  $(n+1)! = (n+1)n!$ .

## 7.5 Anwendungen der Integralrechnung

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Anwendungen der Integralrechnung für Funktionen einer Variablen betrachten: Das Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen und die Berechnung von Volumina von Rotationskörpern.

Mittels des Integralkriteriums lässt sich oft bequem entscheiden, ob eine Reihe konvergent oder divergent ist. Außerdem ergeben sich Abschätzungen für die Reihensumme. Sei dazu  $m \in \mathbb{N}$  und sei  $f : [m, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  eine monoton fallende Funktion. Aus der Monotonie von  $f$  folgt dann

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} f(k) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^n f(k)$$

für jedes  $n > m$  und damit

$$\sum_k f(k) \text{ ist konvergent} \iff \int_m^\infty f(x) dx < \infty.$$

**Beispiel 7.29.** Wegen  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^\infty = 1$  ist  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$  konvergent.

**Beispiel 7.30.** Wegen  $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^\infty = \infty$  ist  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$  divergent.

Ein Rotationskörper entsteht durch die Rotation der Fläche zwischen dem Graph einer stetigen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  und der  $x$ -Achse um die  $x$ -Achse. Einfache Beispiele sind Kugel, Zylinder und Kegel. Zerlegt man den Rotationskörper mittels einer Zerlegung  $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  des Intervalls  $[a, b]$  in Scheiben und approximiert die Funktionswerte von  $f$  im Intervall  $(x_{i-1}, x_i)$  durch eine Konstante  $c_i$ , so erhält man einen aus zylindrischen Schichten mit Radius  $c_i$  und Höhe  $x_i - x_{i-1}$  aufgebauten Körper. Dieser hat dann Volumen

$$\sum_{i=1}^n \pi c_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

Durch Grenzübergang erhalten wir das Volumen des Rotationskörpers

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

**Beispiel 7.31.** Die Kugel mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $0$  erhält man als Rotationskörper für die Funktion  $f : [-r, r] \rightarrow [0, \infty)$  gegeben durch  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Das Volumen der Kugel ist also

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$