Wintersemester 2015/16
A. Hinrichs, B. Eichinger, R. Lechner

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie

1. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 15.10.2015

Aufgabe 1

(a) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ zwei σ-Algebren. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra ist.

(b) Sei I eine beliebige Indexmenge und sei für jedes $i \in I$ eine σ-Algebra $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie, dass auch $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass für jede Menge Ω das Mengensystem

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega \,:\, A \text{ oder } \Omega \setminus A \text{ ist höchstens abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3
Seien Ω und Ω' zwei Mengen und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Weiter sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\mathcal{A}' := \{A' \subseteq \Omega' \,:\, f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 4
Sei $\Omega = \mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen und $\mathcal{A} := \{(a, b] \subset \mathbb{Q} \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Bestimmen Sie die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass eine σ-Algebra entweder endlich viele oder überabzählbar viele Elemente hat.

Hinweis: Hierbei können Sie nach folgenden Schritten vorgehen

- Nehmen Sie an dass eine σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ abzählbar unendlich viele Elemente enthält und betrachten Sie die Mengen
$$M_x = \bigcap \Big\{A \,:\, A \in \mathcal{A}, x \in A\Big\} \qquad \text{für } x \in \Omega.$$
- Zeigen Sie, dass zwei dieser Mengen M_x und M_y entweder gleich oder disjunkt sind.
- Folgern Sie, dass es entweder endlich viele oder abzählbar unendlich viele dieser Mengen gibt.
- Zeigen Sie, dass es nicht nur endlich viele geben kann. Also gibt es abzählbar unendlich viele.
- Zeigen Sie schließlich, dass das System aller Vereinigungen solcher Mengen M_x überabzählbar ist.

Aufgabe 6

Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen einer Menge Ω, so definiert man

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in A \,:\, \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$
$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in A \,:\, \omega \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir erinnern hier daran, dass *fast alle* synonym mit *für alle bis auf endlich viele* ist. Zeigen Sie, dass man $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ auch durch die Ausdrücke

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i\geq n} A_i \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i\geq n} A_i$$

definieren kann. Welcher der Ausdrücke ist $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, welcher $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$?

Aufgabe 7

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$. Man sagt, dass die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert (und schreibt dann $A_n \to A$ oder $\lim_{n\to\infty} A_n = A$,) falls

$$A = \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

gilt. Zeigen Sie:

(a) Ist die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend (d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$), dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(b) Formulieren und zeigen Sie die entsprechende Aussage für monoton fallende Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

(c) Für eine Menge A sei χ_A die charakteristische Funktion von A. Zeigen Sie: Es gilt $A_n \to A$ genau dann, wenn $\chi_{A_n} \to \chi_A$ punktweise konvergiert.

(d) Eine Folge paarweise disjunkter Mengen konvergiert. Was ist der Grenzwert?