Wintersemester 2015/16
A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, A. Thalhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

2. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 14.10.2015

Aufgabe 9 **Mengen I**

Es seien die folgenden Mengen gegeben:

$$\begin{aligned}
X_1 &:= \{y \in \mathbb{Z} : y \text{ ist gerade}\}\\
X_2 &:= \{y \in \mathbb{Z} : \text{es gibt ein } z \in \mathbb{Z} \text{ mit } y^2 + z^2 \leq 2\}\\
X_3 &:= \{y \in \mathbb{Z} : y \text{ ist durch 6 teilbar}\}\\
X_4 &:= \{y \in \mathbb{Z} : (y^4 + y^2 - 2)(y^2 - 2y) = 0\}\\
X_5 &:= \{y \in \mathbb{Z} : 3y^2 \text{ ist durch 4 teilbar}\}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie $X_1 \cap X_2$, $X_3 \cup X_5$, $X_1 \setminus X_3$ und $X_2 \times X_4$.

Aufgabe 10 **Mengen II**

Wir benutzen die gleichen Mengen wie in der vorhergehenden Aufgabe. Für welche $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $i \neq j$ gilt $X_i \subseteq X_j$?

Aufgabe 11 **deMorgansche Regeln**

Ist A Teilmenge einer gegebenen Grundmenge X, so schreiben wir kurz $\overline{A} = X \setminus A$ für das *Komplement* von A in X. Seien A, B Teilmengen einer Grundmenge X. Veranschaulichen Sie sich an einem Venn-Diagramm die folgenden deMorgan-Regeln und beweisen Sie diese.

(a) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

(b) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

(c) An welchem College studierte deMorgan?

Aufgabe 12 **Wahrheitstafeln**

Seien A, B, C beliebige Aussagen. Zeigen Sie die folgenden Tautologien mittels Wahrheitstafeln.

(a) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(b) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$

Aufgabe 13 **Mathematische vs. natürliche Sprache**

Verneinen Sie in kurzen und grammatikalisch korrekten Worten folgende Aussagen:

(a) Es gibt ein schwarzes Schaf, das gerne Salat frisst.

(b) Alle Studierenden der Analysis sind intelligent und fleißig.

(c) In der Analysisvorlesung schläft Tom und schaut aus dem Fenster.

Aufgabe 14 **Quantoren**

Formalisieren Sie die folgenden Sprichwörter und formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen.

(a) Hunde, die bellen, beißen nicht.

(b) Wenn sich zwei streiten, freut sich der Dritte.

Beispiel: Das Sprichwort *Alle Wege führen nach Rom* kann folgendermaßen formalisiert werden. Sei X eine betrachtete Menge von Objekten (Städte, Menschen, Tiere, Wege etc.). Sei $Weg(x)$ die Aussage *x ist ein Weg*. Sei $NachRom(x)$ die Aussage *x führt nach Rom*. Dann ist das obige Sprichwort formalisiert durch

$$\forall x \in X : Weg(x) \Rightarrow NachRom(x)$$

und die Negation

$$\exists x \in X : Weg(x) \text{ und nicht } NachRom(x)$$

oder noch ein bißchen formaler

$$\exists x \in X : Weg(x) \ \wedge \neg NachRom(x)$$

oder in Umgangssprache *Mindestens ein Weg führt nicht nach Rom.*

Aufgabe 15 **geordnete Paare**

Man kann geordnete Paare auch rein mengentheoretisch (aber etwas schwerfällig) definieren durch $(x, y) := \big\{x, \{x, y\}\big\}$. Zeigen Sie, dass dann die Forderung

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2$$

tatsächlich gilt.

Aufgabe 16 **Bild und Urbild einer Funktion**

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist

$$f(A) := \{f(x) \ : \ x \in A\} \subseteq Y$$

das *Bild* von A unter f und für eine Teilmenge $C \subseteq Y$ ist

$$f^{-1}(C) := \{x \in X \ : \ f(x) \in C\} \subseteq X$$

das *Urbild* von C unter f. Seien nun $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$. Welche der folgenden Eigenschaften gilt allgemein? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

(a) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

(b) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$

(c) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$,

(d) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(e) $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cup D)$