Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie

2. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 22.10.2015

Aufgabe 8
Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{A}$. Zeigen Sie

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \qquad \text{für } A, B \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe 9
Für $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\lambda > 0$ setzen wir $\lambda A = \{\lambda \cdot a : a \in A\}$. Zeigen Sie mit dem *Prinzip der guten Mengen*, dass für jede Borelmenge A auch λA eine Borelmenge ist.

Aufgabe 10
Seien $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und sei jede Menge in $\mathcal{E}'$ eine abzählbare Vereinigung von Mengen in $\mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E}') = \sigma(\mathcal{E})$ ist.

Aufgabe 11

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller positiven reellen Zahlen, die in ihrer Dezimaldarstellung an 10. Stelle hinter dem Komma die Ziffer 4 und an 11. Stelle die Ziffer 2 haben, eine Borelmenge ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller positiven reellen Zahlen, die in ihrer Dezimaldarstellung an irgendeiner Stelle hinter dem Komma die Ziffernfolge 42 haben, eine Borelmenge ist.

Aufgabe 12
Sei $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ ist endlich}\}$. Weiter seien die Mengenfunktionen $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ gegeben durch $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$ für endliches $A \in \mathcal{A}$ und $\mu_1(A) = 1, \mu_2(A) = \infty$ für unendliches $A \in \mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein Ring ist.

(b) Zeigen Sie, dass μ_1, μ_2 Prämaße auf $\mathcal{A}$ sind.

Aufgabe 13
Wir benutzen weiter die Bezeichnungen aus der vorhergehenden Aufgabe.

(a) Bestimmen Sie die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{A})$.

(b) Bestimmen Sie die zu μ_1, μ_2 gehörenden äußeren Maße μ_1^*, μ_2^* und die σ-Algebren der μ_1^*- bzw. μ_2^*-messbaren Mengen $\mathcal{M}_{\mu_1^*}$ bzw. $\mathcal{M}_{\mu_2^*}$.