

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 3. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 21.10.2015

AUFGABE 17 Operationen I

Auf \mathbb{R} sei eine Operation \circ gegeben durch $x \circ y = x + 3y$.

- (a) Ist diese Operation assoziativ?
- (b) Ist diese Operation kommutativ?
- (c) Existiert ein neutrales Element?

AUFGABE 18 Operationen II

Sei $\text{Abb}(X)$ die Menge aller Abbildungen $f : X \rightarrow X$ auf einer nichtleeren Menge X und

$$\circ : \text{Abb}(X) \times \text{Abb}(X) \rightarrow \text{Abb}(X)$$

die Operation der Hintereinanderausführung zweier Abbildungen auf X , also $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

- (a) Ist diese Operation assoziativ?
- (b) Ist diese Operation kommutativ?
- (c) Existiert ein neutrales Element?
- (d) Existieren inverse Elemente?

AUFGABE 19 Körperaxiome

Beweisen Sie ausführlich mittels der Körperaxiome die folgende Aussage aus der Vorlesung: Sei K ein Körper und seien $x, y \in K$ mit $x \neq 0$. Wenn $x \cdot y = x$ ist, dann ist $y = 1$.

AUFGABE 20 Körper

Auf \mathbb{R} seien die Operationen $x \oplus y := x + y$ und $x \otimes y := \frac{xy}{2}$ gegeben. Ist dann $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ ein Körper?

AUFGABE 21 Betrag

Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Äquivalenz $|x| \geq |y| \iff x^2 \geq y^2$.

AUFGABE 22 Ungleichungen - Lösungsmengen

Stellen Sie die Menge der Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen in Form von Vereinigungen von Intervallen dar. Veranschaulichen Sie sich die Ungleichungen und Lösungsmengen durch Betrachtung geeigneter Funktionsgraphen

- (a) $|3x - 5| > |2x + 3|$
- (b) $|x - 3| + |x + 3| > 8$
- (c) $|x + 1| - |x| + |x - 1| < 2$
- (d) $3x^2 + 6x - 8 > 1$

AUFGABE 23 Ungleichungen

(a) Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d > 0$ die Aussage $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$.

(b) Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d > 0$ die Aussage $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Geben Sie in Ihren Beweisen detailliert an, welche Eigenschaften der Ordnung aus der Vorlesung Sie jeweils benutzen!

AUFGABE 24 Betrag, Maximum, Minimum

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Formeln

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$