Wintersemester 2015/16

A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, A. Thalhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 4. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 28.10.2015

Aufgabe 25 Dreiecksungleichung für n Zahlen

Zeigen Sie für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

Aufgabe 26 Induktion - Gleichungen

(a) Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

(b) Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k^2+1) = \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{4}$.

(c) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq 1$ die Formel

$$\big(1+x\big)\big(1+x^2\big)\big(1+x^4\big)\cdots\big(1+x^{2^n}\big) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

Aufgabe 27 Induktion - Ungleichungen

(a) Beweisen Sie, dass für $n = 2, 3, \ldots$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^3$? Begründen Sie Ihre Aussage!

(c) Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle 1 + \frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq n + \frac{1}{2}$.

Aufgabe 28 Induktion - kleine Forschungsaufgabe

Sei

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Berechnen Sie die ersten Terme S_1, S_2, S_3, S_4 und stellen Sie eine Vermutung über den Wert von S_n auf. Beweisen Sie diese Vermutung durch vollständige Induktion.

Aufgabe 29 Supremum und Infimum 1

Bestimmen Sie Supremum und Infimum folgender Mengen. Entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum und/oder ein Minimum existiert.

(a) $M = \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(b) $M = \left\{\frac{n}{2n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(c) $M = \left\{\frac{(-1)^m}{m} + \frac{(-1)^n}{n} \,:\quad m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(d) $M = \left\{\frac{|x|}{1+|x|} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe 30 **Supremum und Infimum 2**

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen. Wir setzen $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ und $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

(a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,

(b) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$,

Hinweis zu (b): Sie dürfen Teil (a) benutzen.

Aufgabe 31 **Supremum und Infimum 3**

Seien wieder $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen.

(a) Zeigen Sie $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) Definieren Sie sinnvoll die Menge $A \cdot B$. Unter welcher Voraussetzung an A und B gilt $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?

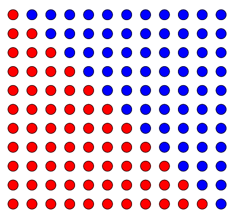
Gibt es eine Analogie zu (a) für $\sup(A \cap B)$?

Aufgabe 32 **Die etwas andere Aufgabe – Beweise ohne Worte**

In der Vorlesung haben wir mittels vollständiger Induktion die Formel

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

bewiesen. Das folgende Bild stellt einen „Beweis ohne Worte“ für diese Formel dar:



Dieses Bild zeigt auch, warum die Zahlen $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ Dreieckszahlen genannt werden.
Finden Sie einen Beweis ohne Worte dafür, dass die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen eine Quadratzahl ist.
Finden Sie einen Beweis ohne Worte für die Formel

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$