Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie
3. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 29.10.2015

Aufgabe 14 Durchschnitte kompakter Mengen
Ein kompakter metrischer (oder topologischer) Raum ist charakterisiert durch die folgende Eigenschaft: Zu jeder Überdeckung von M durch offene Mengen existiert eine Teilüberdeckung mit endlich vielen Mengen. Ist also $M = \bigcup_{i \in I} O_i$ mit einer beliebigen Indexmenge I und offenen Mengen O_i, so existieren $i_1, \ldots, i_n$ mit $M = \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$.
Zeigen Sie: Ist M ein kompakter metrischer Raum, I eine Indexmenge und sind K_i für $i \in I$ abgeschlossene Mengen mit $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$, dann existieren $i_1, \ldots, i_n$ mit $\bigcap_{k=1}^n K_{i_k} = \emptyset$.

Aufgabe 15 Lebesgue vs. Borel
In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass das Lebesgue-Maß auf den Borel-Mengen translationsinvariant ist. Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß sogar auf den Lebesgue-messbaren Mengen translationsinvariant ist.
Benutzen Sie dazu den folgenden Satz, der in der Vorlesung nicht bewiesen wurde: Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring und μ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{A}$. Für $A \subseteq \Omega$ gilt $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ genau dann, wenn es eine Menge $N \subseteq \Omega$ mit $\mu^*(N) = 0$ und $A \cup N \in \sigma(\mathcal{A})$ gibt.

Aufgabe 16 Die Cantor-Menge
Ziel dieser Aufgabe ist, die Cantormenge genauer kennenzulernen und einzusehen, dass sie eine überabzählbare Menge mit Lebesgue-Maß 0 ist. Für ein abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$ sei $C(I)$ die Menge bestehend aus dem rechten und linken Drittel von I:

$$C(I) = \left\{ \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right], \left[b - \frac{b-a}{3}, b\right] \right\}.$$

Wir setzen nun induktiv

$$\mathcal{A}_0 = \{[0,1]\}, \qquad \mathcal{A}_n = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_{n-1}} C(I) \text{ für } n \geq 1.$$

Zum Beispiel ist $\mathcal{A}_1 = \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, 1]\}$. Weiter sei

$$A_n = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_n} I \text{ für } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{und } X = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

X ist die sogenannte *Cantor-Menge.*

(a) Wie viele Intervalle enthält $\mathcal{A}_n$?

(b) Welche Länge haben die Intervalle in $\mathcal{A}_n$?

(c) Berechnen Sie das Lebesgue-Maß von A_n und von X. Warum ist X Lebesgue-messbar?

(d) Zeigen Sie, dass X überabzählbar ist.

Aufgabe 17 Messbare Funktionen
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann die Mengen $\{f \geq g\}$ und $\{f = g\}$ in $\mathcal{A}$ liegen.

Aufgabe 18 Monotone Funktionen
Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist messbar.