A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, A. Thalhammer, M. Ullrich

# Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 5. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 04.11.2015

---

**Aufgabe 33 Komplexe Zahlen - Produkte und Quotienten**
Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit reellen Zahlen $x, y$ dar:

(a) $(2 + 5\mathrm{i})(12 + 18\mathrm{i})$

(b) $\dfrac{5 + 3\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$

**Aufgabe 34 Komplexe Zahlen - Potenzen**
Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit reellen Zahlen $x, y$ dar:

(a) $\mathrm{i}^{2012}$

(b) $\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{42}$

(c) $(-\sqrt{5} + \mathrm{i}\sqrt{5})^3(1 + \mathrm{i})^2$

(d) $\left(\dfrac{4 + \mathrm{i}^7}{2 + \mathrm{i}^{13}}\right)^2$

(e) $\left(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3 \left(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3$.

**Aufgabe 35 Parallelogrammgleichung**
Es seien $z$ und $w$ beliebige komplexe Zahlen. Beweisen Sie $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

**Aufgabe 36 Mengen in der Gaußschen Zahlenebene**
Skizzieren Sie die folgenden Mengen komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene :

(a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}\,(2z + 1) < -1\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| - \overline{z} = 1 + 2\mathrm{i}\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 5\mathrm{i}|\}$

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\,, \ \left|z - \tfrac{1}{2}\right| \geq \tfrac{1}{2}\right\}$

**Aufgabe 37 Smiley in der Gaußschen Zahlenebene**

Beschreiben Sie die gelbe Menge  in der Gaußschen Zahlenebene.

**Aufgabe 38 Die Ungleichung von Ptolemäus**
Durch die Interpretation komplexer Zahlen als Punkte der Gaußschen Zahlenebene ergibt sich die Möglichkeit, viele elementargeometrische Sätze elegant mittels komplexer Zahlen herzuleiten. Ein Beispiel ist die Ungleichung von Ptolemäus: In jedem Viereck ist die Summe der Produkte der Längen gegenüberliegender Seiten mindestens so groß wie das Produkt der Längen der Diagonalen. Das soll in dieser Aufgabe bewiesen werden.

(a) Seien die Eckpunkte des Vierecks in der Gaußschen Zahlenebene die komplexen Zahlen $u, v, w, z$. Zeichnen Sie ein Bild, bestimmen Sie die Längen der Seiten und Diagonalen und formulieren Sie die Ungleichung von Ptolemäus als Formel.

(b) Beweisen Sie die Identität $(u - v)(w - z) + (u - z)(v - w) = (u - w)(v - z)$.

(c) Leiten Sie daraus die Ungleichung von Ptolemäus ab.

**Aufgabe 39 Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit, Mächtigkeit**
Beweisen Sie:

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(b) Die Menge aller Folgen, die nur Folgenglieder aus der Menge $\{0, 1\}$ enthalten, ist überabzählbar.

(c) Zwei abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ sind gleichmächtig.

(d) Die Potenzmenge einer Menge $X$ und die Menge aller Funktionen $f : X \to \{0, 1\}$ sind gleichmächtig.

<u>AUFGABE 40</u> **Die etwas andere Aufgabe**

Wir beweisen mittels vollständiger Induktion, daß alle Frauen blond sind. Gibt es in diesem Beweis eventuell einen Fehler?
Wir führen den Beweis, indem wir für jede Gruppe von $n$ Frauen zeigen, daß alle Frauen in der Gruppe die gleiche Haarfarbe haben. Da es nur endlich viele Frauen gibt, müssen also alle die gleiche Haarfarbe haben. Da es mindestens eine blonde Frau gibt, müssen also alle blond sein.
Die Behauptung über die einheitliche Haarfarbe einer Frauengruppe zeigen wir per Induktion über die Gruppengröße $n$. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich. Die Induktionsvorraussetzung ist nun, daß in jeder Gruppe von $n$ Frauen alle die gleiche Haarfarbe haben. Wir müssen dies für Gruppen von $n + 1$ Frauen zeigen. Nehmen wir also eine solche Gruppe von $n + 1$ Frauen her und bilden durch Herausnehmen der kleinsten Frau eine Gruppe von $n$ Frauen. Diese haben nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Haarfarbe. Fügen wir nun die kleinste Frau wieder dazu und nehmen dafür die größte heraus erhalten wir wieder eine Gruppe von $n$ Frauen, die nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Haarfarbe haben. Die kleinste Frau hat also auch die gleiche Haarfarbe wie die anderen $n$. Damit ist der Induktionsbeweis vollständig.