Wintersemester 2015/16
A. Hinrichs, B. Eichinger, R. Lechner

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie
4. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 05.11.2015

Aufgabe 19 **Messbarkeit von Limes Superior und Limes Inferior**
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $f_n : \Omega \to [-\infty, \infty], n \in \mathbb{N}$ eine Folge messbarer Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $\liminf_{n\to\infty} f_n$ und $\limsup_{n\to\infty} f_n$ messbar sind.
Hinweis: Stellen Sie die Menge $A = \{f > y\}$ für $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ geeignet durch die Mengen $A_n = \{f_n > y\}$ dar.

Aufgabe 20 **Ableitungen sind messbar**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar ist.
Hinweis: Die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

könnte nützlich sein.

Aufgabe 21 **Separat stetige Funktionen ...**
Sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ separat stetig, d.h. für jedes $x \in [0,1]$ ist $y \mapsto f(x,y)$ stetig und für jedes $y \in [0,1]$ ist $x \mapsto f(x,y)$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

separat stetig, aber nicht stetig ist.

Aufgabe 22 **... sind messbar**
Zeigen Sie das folgende Resultat von Lebesgue (1898): Jede separat stetige Funktion ist messbar. Betrachten Sie dazu die Funktionenfolge

$$f_n(x,y) = n\left[f\Big(\frac{k}{n}, y\Big)\Big(x - \frac{k}{n}\Big) + f\Big(\frac{k+1}{n}, y\Big)\Big(\frac{k+1}{n} - x\Big)\right] \text{ für } \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \text{ und } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Aufgabe 23 **Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume**
Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Für $A \subseteq \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}(A) = \sum_{n\in A} p_n$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, d.h. ein Maßraum mit $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 1$.

Aufgabe 24 **Translationen**
Zu einer Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definieren wir die um $x \in \mathbb{R}^d$ verschobene Funktion als $f_x(y) = f(y - x)$. Zeigen Sie:

(a) Ist f messbar, so ist auch f_x messbar.

(b) Ist f integrierbar, so ist auch f_x integrierbar und es gilt $\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f_x(y)\,\mathrm{d}y$.