

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 6. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 11.11.2015

AUFGABE 41 Konvergenz - Wurzeln

Sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{a}$.

AUFGABE 42 Konvergenz - Arithmetische Mittel

Sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen und sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel $\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ gegen a konvergiert.
- (b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge reeller Zahlen an, deren arithmetische Mittel konvergieren, die aber selbst nicht konvergent ist.

AUFGABE 43 Konvergenz - Maxima und Minima

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{a, b\}$. Hilfreich könnte dabei eine Aufgabe aus der Übungsserie 3 sein.

AUFGABE 44 Konvergenz und Grenzwerte

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{3^n + (-3)^n}{4^n}$ (b) $a_n = (-42)^n$ (c) $a_n = \frac{7+1/\sqrt{n}}{\sqrt{n+42^{-n}}}$

AUFGABE 45 Konvergenz - rationale Funktionen

Sei

$$a_n = \frac{r_0 + r_1 n + r_2 n^2 + \dots + r_k n^k}{s_0 + s_1 n + s_2 n^2 + \dots + s_k n^k}$$

für vorgegebene $r_i, s_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, k$ mit $s_k \neq 0$. Dann ist der Nenner für fast alle $n \in \mathbb{N}$ verschieden von 0 (das brauchen Sie nicht zu zeigen). Entscheiden Sie, ob die Folge (a_n) konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 46 Grenzwerte - I

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$ für gegebenes $x \in \mathbb{R}$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)! - n!}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

AUFGABE 47 Grenzwerte - II

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$

AUFGABE 48 Die Forschungsaufgabe - Teil 1

Sei $x > 0$, $a_1 = 1$. Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei induktiv durch $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{x}{a_n} \right)$ gegeben.

- (a) Berechnen Sie mit dem Hilfsmittel ihrer Wahl die ersten 10 Folgenglieder der Folge (a_n) für $x = 1, 4, 9, 16$ mindestens auf 6 Stellen nach dem Komma genau. Formulieren Sie eine Vermutung über die Konvergenz der Folge (a_n) und ihren Grenzwert.
- (b) Berechnen Sie mit dem Hilfsmittel ihrer Wahl die ersten 10 Folgenglieder der Folge (a_n) für $x = 2, 3, 5$ mindestens auf 6 Stellen nach dem Komma genau. Erhärten Sie Ihre Vermutung aus (a)?