Wintersemester 2015/16
A. Hinrichs, B. Eichinger, R. Lechner

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie
5. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 12.11.2015

Aufgabe 25 **Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen**

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Für eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ ist $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit des *Ereignisses* A. Eine messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Zufallsvariable* und die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ heißt *Verteilungsfunktion* von X. Zeigen Sie:

(a) Die Verteilungsfunktion F_X ist monoton wachsend.

(b) Die Verteilungsfunktion F_X ist rechtsseitig stetig.

(c) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Aufgabe 26 **Charakterisierung von Verteilungsfunktionen**

Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Funktion mit den Eigenschaften (a),(b),(c) aus der vorhergehenden Aufgabe. Zeigen Sie, dass es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und eine Zufallsvariable X auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum mit Verteilungsfunktion $F_X = F$ gibt.

Hinweis: Sei $\mathcal{F}$ der Ring der halboffenen Intervalle der Form $(a, b]$, siehe Beispiel auf Seite 1. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jedes $A \in \mathcal{F}$ endliche Vereinigung halboffener Intervalle ist. Für $A = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$, definieren wir

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i).$$

Zeigen Sie:

- μ ist ein Prämaß auf $\mathcal{F}$.
- Verwenden Sie den Fortsetzungssatz von Caratheodory.

Aufgabe 27 **Erwartungswert und Markow-Ungleichung**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable darauf. Der *Erwartungswert* von X ist $\mathbb{E}X = \int_\Omega X \, \mathrm{d}\mathbb{P}$. Zeigen Sie die Markow-Ungleichung: Ist $X \geq 0$ und $t > 0$, dann gilt $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}X}{t}$.

Aufgabe 28 **Zum Satz von der dominierten Konvergenz.**

Finden Sie ein Beispiel für eine punktweise konvergente Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die der punktweise Grenzwert $f = \lim_n f_n$ nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 29 **Integrierbarkeit monotoner Grenzwerte**

Sei $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen auf einem Massraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und es gelte $f_n \nearrow f$ punktweise. Außerdem sei $\sup_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Zeigen Sie, dass dann auch f integrierbar ist und $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \sup_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$ gilt.

Aufgabe 30 **Integrierbarkeitskriterium**

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion bezüglich des Maßraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \mu\Big(\{2^n \leq |f| \leq 2^{n+1}\}\Big) < \infty$$

ist.