Wintersemester 2015/16

A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, A. Thalhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 7. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 18.11.2015

Aufgabe 49 Ein Grenzwertkriterium

Sei (a_n) eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen, für die eine Teilfolge gegen a konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch (a_n) gegen a konvergiert.

Aufgabe 50 Die Eulersche Zahl

Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^k$ gilt.
Hinweis: Die vorhergehende Aufgabe könnte hilfreich sein.

Aufgabe 51 Teilfolgen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Teilfolgen:

(a) Ist (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$. Ist (a_n) eine Folge komplexer Zahlen, so daß jede Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ eine weitere Teilfolge $(a_{n_{k_\ell}})_\ell$ besitzt, die gegen a konvergiert, so konvergiert die Folge (a_n) selbst gegen a.
Hinweis: indirekter Beweis

Aufgabe 52 Monotoniekriterium

Die Folge (a_n) sei gegeben durch

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots.$$

Es gilt also die Rekursionsformel $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(a) Zeigen Sie $0 < a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton ist.

(c) Zeigen Sie, daß (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 53 Die Forschungsaufgabe - Teil 2

Wir untersuchen die Folge aus Aufgabe 48 der 6. Serie weiter: Sei $x > 0$, $a_1 = 1$. Die Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ sei induktiv durch $\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{x}{a_n}\right)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie $a_n \geq \sqrt{x}$ für $n \geq 2$. (Hinweis: Die Ungleichung $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ könnte hilfreich sein.)

(b) Zeigen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n=2}^\infty$ monoton und beschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, daß (a_n) konvergent ist.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$. War Ihre Vermutung aus Aufgabe 48 der 6. Serie korrekt?

Aufgabe 54 Noch ein paar Grenzwerte

Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(a) $a_n = \dfrac{3n^2 - 4n + 3}{2 - n - 5n^2}$ (b) $\dfrac{9^n}{10^n(n+1)}$ (c) $a_n = \sqrt{16n^2 - 6n - 6} - 4n$

Hinweis zu (c): $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Aufgabe 55 **Keine Cauchyfolge**

Geben Sie eine Folge (a_n) mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ an, die keine Cauchyfolge ist. Machen Sie sich nun noch einmal klar, was eine Cauchy-Folge ausmacht.

Aufgabe 56 **Cauchyfolgen**

(a) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Formel für eine *geometrische Summe* gilt:

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\left|a_{n+1} - a_n\right| \leq q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß (a_n) eine Cauchy-Folge ist.